Álgebra Lineal

Taller N^o 2 con Matlab

Tema: Introducción a las transformaciones lineales. Determinantes. Valores y vectores propios de matrices de orden n.Diagonalización de matrices de orden n. Aplicación a sistemas de ecuaciones en diferencias. Ortogonalidad en $\mathbb{R}^n$. Proceso de Gram Schmidt y factorización QR. Diagonalización ortogonal.

Diseñado por Rosa Franco Arbeláez.

Para los ejercicios 1, 2, 3, 4, 6 y 7, generar números aleatorios $a, b, c, d, m,$ y n y utilizarlos para resolver cada uno de dichos ejercicios. En el ejercicio 5 de dan datos fijos.

Ejercicio 1

Considere la transformación lineal $S : R^3 \to R^4$ definida por $S\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - bz + (a+2)\,y \\ cx + 2cy + (b+c)\,z \\ -2ay + 3bz - dx \\ -bx + cy + dz \end{pmatrix}$.

Encuentre:

$a)$ La matriz de S con respecto a las bases estándar de R^3 y R^4.

$b)$ La imagen del vector $\begin{pmatrix} m \\ n \\ d \end{pmatrix}$ bajo la transformación S.

$c)$ La imagen del plano con ecuación $y = nx + mz$ bajo S.

Ejercicio 2

$a)$ Sea $P : R^3 \to R^3$ la transformación proyección sobre la recta con ecuaciones simétricas $\frac{2x}{a} = -\frac{y}{b} = \frac{z}{c}$. Encuentre la ley de asignación de P.

$b)$ Sea $Q_U : R^3 \to R^3$ la transformación proyección sobre el plano que pasa por el origen y tiene como vector normal el vector $U = \begin{pmatrix} a/2 \\ -b \\ c \end{pmatrix}$.Encuentre la ley de asignación de Q_U.

$c)$ Halle la ley de asignación de la transformación $R_U : R^3 \to R^3$,que representa la reflexión con respecto al plano que pasa por el origen y tiene como vector normal el vector U dado en $b)$.

$d)$ Encuentre la matriz de la transformación rotación por un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ alrededor del eje z y calcule la imagen del vector U dado en $b)$ bajo dicha transformación.

Ejercicio 3

Para cada una de las siguientes transformaciones lineales determine si es invertible y, en caso afirmativo, encuentre la ley de asignación de su inversa.

$a)$ $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ax \\ by + cz \\ bz - cy \end{pmatrix}$

$b)$ $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by+cz \\ dz+my+nx \\ (2c-d)\,z+(2a-n)\,x+(2b-m)\,y \end{pmatrix}$

Ejercicio 4

Si $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & -d & m \\ c & -d & -n & a \\ d & m & a & b \end{pmatrix}$,

$a)$ Encuentre el polinomio característico de A.

$b)$ Encuentre los eigenvalores y los eigenespacios de A.

$c)$ Determine si A es similar a una matriz diagonal.

$d)$ ¿Existirá una base para R^3 formada por vectores propios de A?.En caso afirmativo, halle una de tales bases.

$e)$ Encuentre, si es posible, una matriz invertible P y una matriz diagonal D tales que $A = PDP^{-1}$

$f)$ Encuentre, si es posible, una matriz ortogonal Q y una matriz diagonal Λ tales que $A = Q\Lambda Q^T$.

Ejercicio 5

Un banco que tiene dos sucursales D y E en una ciudad, mantiene una política de rotación anual del personal, te tal forma que cada año las dos terceras partes del personal de la sucursal D se traslada a la sucursal E y la mitad de los empleados de la sucursal E se traslada a la sucursal D.

Suponiendo que inicialmente se tenían 420 empleados en la sucursal D y 630 en la sucursal E, determine el número de empleados que habrá, a largo plazo, en cada sucursal.

Ejercicio 6

Considere el espacio $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in R^4 : ax+by+dw=0, \quad dx-cz+aw=0 \right\}$.

$a)$ Halle una base β para $H^{\perp}$

$b)$ Exprese el complemento ortogonal de H mediante restricciones sobre las componentes de sus vectores.

$c)$ Si A es la matriz cuyas columnas son los elementos de la base β, en su orden, halle la factorización QR de la matriz A.

$d)$ Halle una base ortonormal para $H^{\perp}$.

$e)$ Calcule la matriz de proyección ortogonal sobre H.

$f)$ Encuentre las componentes ortogonales del vector $e = \begin{pmatrix} a \\ b \\ -c \\ d \end{pmatrix}$ sobre H y $H^{\perp}$ son respectivamente:

$g)$ Calcule la distancia del vector e al subespacio H.

Ejercicio 7

Dados los vectores $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ -a \end{pmatrix}$, $\quad v_2 = \begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$, $\quad v_3 = \begin{pmatrix} a^2 \\ ab \\ a^2+b^2 \end{pmatrix}$, suponga que A es la matriz cuyos valores propios (eigenvalores) son m y $-n$ y sus respectivos espacios propios (eigenespacios) son: para m el espacio generado por v_1 y para $-n$ el espacio generado por los vectores v_2 y v_3.

a) Compruebe que A es diagonalizable ortogonalmente encuentre la descomposición espectral de la matriz A.

b) Si $h = \begin{pmatrix} a+1 \\ b-3 \\ a+4 \end{pmatrix}$, halle la proyección ortogonal del vector Ah sobre el espacio propio asociado al valor propio $-n$.

c) Calcule la matriz A.

Solución con Matlab

Generamos 6 números aleatorios enteros, mediante la instrucción:

```
>> v=fix(5*rand(1,6))
v =
4    1    3    2    4    3
```

```
>> a=v(1); b=v(2); c=v(3); d=v(4); m=v(5); n=v(6);
```

Solución de ejercicio 1:

Considereremos la transformación lineal $S : R^3 \to R^4$ definida por

$$S\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - bz + (a+2)\,y \\ cx + 2cy + (b+c)\,z \\ -2ay + 3bz - dx \\ -bx + cy + dz \end{pmatrix}$$

.

a) La matriz de S, con repecto a las bases estándar de R^3 y R^4 es

$$\begin{pmatrix} a & a+2 & -b \\ c & 2c & b+c \\ -d & -2a & 3b \\ -b & c & d \end{pmatrix}$$

y la calculamos así:

```
>> A=[a  a+2  -b;   c  2*c  b+c;   -d  -2*a  3*b;   -b  c  d]
A =
4    6    -1
3    6    4
-2    -8    3
-1    3    2
```

Luego, la matriz estándar de la transformación S es $\begin{pmatrix} 4 & 6 & -1 \\ 3 & 6 & 4 \\ -2 & -8 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

b) La imagen del vector $\begin{pmatrix} m \\ n \\ d \end{pmatrix}$ bajo la transformación S está dada por

$$S\begin{pmatrix} m \\ n \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+2 & -b \\ c & 2c & b+c \\ -d & -2a & 3b \\ -b & c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ n \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -bd + am + n\,(a+2) \\ cm + 2cn + d\,(b+c) \\ 3bd - 2an - dm \\ -bm + cn + d^2 \end{pmatrix}$$

```
>> A*[m; n; d]
ans =
32
38
-26
9
```

Luego, $S\begin{pmatrix} m \\ n \\ d \end{pmatrix} = S\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 38 \\ -26 \\ 9 \end{pmatrix}$

c) La imagen del plano con ecuación $y = nx + mz$, bajo la transformación S, es el conjunto de las imágenes de los vectores de la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tales que } y = nx + mz$$

Es decir, de las imágenes de los vectores de la forma $\begin{pmatrix} x \\ nx + mz \\ z \end{pmatrix}$, con $x, z \in \mathbb{R}$.

Dichos vectores son:

$$\begin{pmatrix} a & a+2 & -b \\ c & 2c & b+c \\ -d & -2a & 3b \\ -b & c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ nx + mz \\ z \end{pmatrix}$$

y los podemos calcular así:

```
>> syms x z
```

```
>> A*[x; n*x+m*z; z]
ans =
22*x+23*z
21*x+28*z
-26*x-29*z
8*x+14*z
```

Luego el conjunto imagen del plano con ecuación $y = 3x + 4z$ es

$$\left\{ \begin{pmatrix} 22x+23z \\ 21x+28z \\ -26x-29z \\ 8x+14z \end{pmatrix} : x, z \in \mathbb{R} \right\} = gen \left\{ \begin{pmatrix} 22 \\ 21 \\ -26 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 23 \\ 28 \\ -29 \\ 14 \end{pmatrix} \right\}$$

Solución de ejercicio 2:

a) Sea $P : R^3 \to R^3$ la transformación proyección sobre la recta con ecuaciones simétricas $\frac{2x}{a} = -\frac{y}{b} = \frac{z}{c}$. Entonces la ley de asignación de P está dada por

$$P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} a/2 \\ -b \\ c \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} a/2 \\ -b \\ c \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a/2 \\ -b \\ c \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} a/2 \\ -b \\ c \end{pmatrix} = \frac{\frac{1}{2}ax - by + cz}{\frac{1}{4}a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} a/2 \\ -b \\ c \end{pmatrix}$$

Calculamos esta expresión como sigue:

```
>> syms x y z
>> p=(((1/2)*a*x-b*y+c*z)/((1/2)*a^2+b^2+c^2))*[a/2; -b; c]
p=
2/9*x-1/9*y+1/3*z
-1/9*x+1/18*y-1/6*z
1/3*x-1/6*y+1/2*z
```

Luego, $P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9}x - \frac{1}{9}y + \frac{1}{3}z \\ -\frac{1}{9}x + \frac{1}{18}y - \frac{1}{6}z \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}y + \frac{1}{2}z \end{pmatrix}$

b) Sea $Q_U : R^3 \to R^3$ la transformación proyección sobre el plano que pasa por el origen y tiene como vector normal el vector $U = \begin{pmatrix} a/2 \\ -b \\ c \end{pmatrix}$. Hallemos la ley de asignación de Q_U.

$$Q_U\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - P_U\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{2}{9}x - \frac{1}{9}y + \frac{1}{3}z \\ -\frac{1}{9}x + \frac{1}{18}y - \frac{1}{6}z \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}y + \frac{1}{2}z \end{pmatrix}$$

```
>> q=[x; y; z]-p
q =
7/9*x+1/9*y-1/3*z
17/18*y+1/9*x+1/6*z
1/2*z-1/3*x+1/6*y
```

Luego la ley de asignación de la transformación proyección sobre el plano con vector normal U es

$$Q_U\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{9}x+\frac{1}{9}y-\frac{1}{3}z\\\frac{1}{9}x+\frac{17}{18}y+\frac{1}{6}z\\-\frac{1}{3}x+\frac{1}{6}y+\frac{1}{2}z\end{pmatrix}$$

c) Halle la ley de asignación de la transformación $R_U : R^3 \to R^3$,que representa la reflexión con respecto al plano que pasa por el origen y tiene como vector normal el vector U está dada por

$$R_U\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=2Q_U\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

Calculemos esta ley de asignación como sigue:

```
>> r=2*q-[x;y;z]
r =
5/9*x+2/9*y-2/3*z
8/9*y+2/9*x+1/3*z
-2/3*x+1/3*y
```

Luego,

$$R_U\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{9}x+\frac{2}{9}y-\frac{2}{3}z\\\frac{2}{9}x+\frac{8}{9}y+\frac{1}{3}z\\-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y\end{pmatrix}$$

d) La matriz de la transformación rotación por un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ alrededor del eje z está dada por

$$\begin{pmatrix}cos\frac{\pi}{3} & -sen\frac{\pi}{3} & 0\\ sen\frac{\pi}{3} & cos\frac{\pi}{3} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0\\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

y la imagen de U bajo esta transformación es

$$R_{\frac{\pi}{3}}(U)=\begin{pmatrix}cos\frac{\pi}{3} & -sen\frac{\pi}{3} & 0\\ sen\frac{\pi}{3} & cos\frac{\pi}{3} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a/2\\-b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0\\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a/2\\-b\\c\end{pmatrix}$$

Calculamos este producto así:

```
>>format rat
>> M=[cos(pi/3) -sin(pi/3) 0; sin(pi/3) cos(pi/3) 0; 0 0 1]
M =
[ 1/2, -sqrt(3/4), 0]
[ sqrt(3/4), 1/2, 0]
[ 0, 0, 1]
```

```
>> U=[a/2; -b; c]
U =
2
-1
3
```

\>> M*U
ans =
1+1/2*3^(1/2)
3^(1/2)-1/2
3

Luego,

$$R_{\frac{\pi}{3}}(U) = \begin{pmatrix} 1 + 1/2 * 3\hat{}(1/2) \\ 3\hat{}(1/2) - 1/2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{3} - \frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$$

Solución de ejercicio 3:

a) La matriz de la transformación definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ax \\ by + cz \\ bz - cy \end{pmatrix}$ es:

$$\begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & -c & b \end{pmatrix}$$

Creamos esta matriz:

\>> M=[-a 0 0; 0 b c; 0 -c b]
M =
-4 0 0
0 1 3
0 -3 1

Determinamos si M es invertible, calculando su determinante:

\>> det(M)
ans =
-40

Como $detM \neq 0$, entonces M sí es invertible y por lo tanto, también es invertible la transformación T.

La matriz de T^{-1} es M^{-1}.
Calculamos la inversa de M :

\>>format rat
\>>inv(M)
ans =
[-1/4, 0, 0]
[0, 1/10, -3/10]
[0, 3/10, 1/10]

Luego,

$$T^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/10 & -3/10 \\ 0 & 3/10 & 1/10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}x \\ \frac{1}{10}y - \frac{3}{10}z \\ \frac{3}{10}y + \frac{1}{10}z \end{pmatrix}$$

b) La matriz de la transformación $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by+cz \\ dz+my+nx \\ (2c-d)\,z+(2a-n)\,x+(2b-m)\,y \end{pmatrix}$ es

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ n & m & d \\ 2a-n & 2b-m & 2c-d \end{pmatrix}$$

De la forma de la matriz se ve claramente que la tercera fila es una combinación lineal de las otras dos y por lo tanto, es claro que dicha matriz no es invertible, así que la transformación T no es invertible.

Con los datos generados creamos la matriz M y luego calculamos su determinante, así:

```
>> M=[a b c; n m d; 2*a-n 2*b-m 2*c-d]
M =
4   1   3
3   4   2
5   -2   4
```

```
>> det(M)
ans =
0
```

Lo que confirma que la matriz M no es invertible y tampoco lo es la transformación T.

Solución de ejercicio 4:

Si $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & -d & m \\ c & -d & -n & a \\ d & m & a & b \end{pmatrix}$,

Creamos la matriz A:

```
>> A=[a b c d;  b -a -d m;  c -d -n a;  d m a b]
A =
4   1   3   2
1   -4   -2   4
3   -2   -3   4
2   4   4   1
```

Calculamos el polinomio característico de A :

```
>> p=poly(A)
p =
1.0000   2.0000   -69.0000   -41.0000   171.0000
```

Luego el polinomio característico de A es $\lambda^4 + 2\lambda^3 - 69\lambda^2 - 41\lambda + 171$

b) Los valores propios (eigenvalores) de A son las raíces del polinomio característico y podemos hallarlas mediante la instrucción:

```
>> v=roots(p)
```

v =
-8.9555
7.5104
-1.8959
1.3410

Luego los valores propios, aproximados, de A son: -8.9555, 7.5104, -1.8959, 1.3410

Ahora, para hallar los espacios propios (eigenespacios), correspondientes a cada valor propio, procedemos como sigue:

```
>> null(A-v(1)*eye(4), 'r')
ans =
0.2398
-1.3597
-1.2491
1.0000
```

```
>> null(A-v(2)*eye(4), 'r')
ans =
1.2385
0.3388
0.6696
1.0000
```

```
>> null(A-v(3)*eye(4), 'r')
ans =
Empty matrix: 4-by-0
```

```
>> null(A-v(4)*eye(4), 'r')
ans =
-0.9606
0.5712
-0.0056
1.0000
```

Como podemos observar, para el tercer valor propio aproximado nos da como respuesta matriz vacía, no encuentra un vector propio aproximado, pero veamos que ocurre con el valor propio exacto:

Los valores propios exactos podemos calcularlos con la instrucción:

```
>>format long
>> eig(A)
ans =
1.3409728393316165226851137199915
7.5104355356642872666992237226068
-1.8959295453755704287312264368553
-8.9554788296203333606531110057431
```

```
>> null(A-( -1.8959295453755704287312264368553)*eye(4),'r')
ans =
-3.0808
-6.8575
7.6739
1.0000
```

Luego hemos encontrado un vector propio (aproximado) para cada valor propio y como los cuatro valores propios son diferentes, sabemos que cada espacio propio es el generado por el respectivo valor propio.

Verificación para el valor propio v(1):

```
>> A* [ 0.2398; -1.3597; -1.2491; 1.0000]
ans =
-2.1478
12.1768
11.1861
-8.9556
```

```
>> ans./-8.9555
ans =
0.2398
-1.3597
-1.2491
1.0000
```

De donde se puede observar que $A \begin{pmatrix} 0.2398 \\ -1.3597 \\ -1.2491 \\ 1.0000 \end{pmatrix} = -8.9555 \begin{pmatrix} 0.2398 \\ -1.3597 \\ -1.2491 \\ 1.0000 \end{pmatrix}$

c) A sí es similar a una matriz diagonal, ya que es de orden 4 y posee cuatro valores propios diferentes.

d) Como A es similar a una matriz diagonal, sí existe una base para R^4 formada por vectores propios de A. Para hallar una de tales bases, basta con unir bases de los diferentes espacios propios (una base por cada espacio propio). Luego, una base para R^4 formada por vectores propios de A es

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0.2398 \\ -1.3597 \\ -1.2491 \\ 1.0000 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.2385 \\ 0.3388 \\ 0.6696 \\ 1.0000 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3.0808 \\ -6.8575 \\ 7.6739 \\ 1.0000 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.9606 \\ 0.5712 \\ -0.0056 \\ 1.0000 \end{pmatrix} \right\}$$

.

e) Como A es similar a una matriz diagonal, sí existe una matriz invertible P y una matriz diagonal D tales que $A = PDP^{-1}$. La matriz P, podemos formarla con los vectores de la base hallada en *d*) colocados como sus columnas.

$$P = \begin{pmatrix} 0.2398 & 1.2385 & -3.0808 & -0.9606 \\ -1.3597 & 0.3388 & -6.8575 & 0.5712 \\ -1.2491 & 0.6696 & 7.6739 & -0.0056 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} -8.9555 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7.5104 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.8959 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.3410 \end{pmatrix}$$

f) Una manera de encontrar Q y Λ, directamente (tomando $\Lambda = L$) es mediante la instrucción:

>> [Q,L]=eig(A,'nobalance')
Q =

-0.1135	-0.2855	-0.6406	-0.7038
0.6434	-0.6356	0.3808	-0.1925
0.5910	0.7113	-0.0037	-0.3805
-0.4732	0.0927	0.6668	-0.5682

L =

-8.9555	0	0	0
0	-1.8959	0	0
0	0	1.3410	0
0	0	0	7.5104

Observamos que en la diagonal de la matriz L aparecen los valores propios de A (en diferente orden al del literal b)). Como la matriz A es simétrica, la matriz Q aquí obtenida es una matriz ortogonal formada por vectores propios de A.

Verificación:

Veamos primero que efectivamente la matriz Q es ortogonal calculando QQ^T, así:

>> Q*transpose(Q)
ans =

1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	1.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	1.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	1.0000

Ahora comprobemos que $A = QLQ^T$, mediante la instrucción:

>> Q*L*transpose(Q)
ans =

4.0000	1.0000	3.0000	2.0000
1.0000	-4.0000	-2.0000	4.0000
3.0000	-2.0000	-3.0000	4.0000
2.0000	4.0000	4.0000	1.0000

Solución de ejercicio 5:

Consideremos las siguientes incógnitas:

x_k = # de empleados que laboran en la sucursal D en el k-ésimo año.
y_k = # de empleados que laboran en la sucursal E en el k-ésimo año.

Según la información dada, las siguientes ecuaciones relacionan la distribución de los empleados en las dos sucursales, correspondiente al año k+1 con la correspondietne al k-ésimo año:

$$\begin{array}{rcl} x_{k+1} & = & \frac{1}{3}x_k + \frac{1}{2}y_k \\ y_{k+1} & = & \frac{2}{3}x_k + \frac{1}{2}y_k \end{array} \quad \text{con} \quad \begin{array}{rcl} x_0 & = & 420 \\ y_0 & = & 630 \end{array}$$

Sea $u_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$ la distribución de los empleados en el k-ésimo año, entonces se tiene $u_{k+1} = Au_k$ con $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ y $u_0 = \begin{pmatrix} 420 \\ 630 \end{pmatrix}$

Hemos modelado el problema mediante un proceso $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ gobernado por la ecuación en diferencias $u_{k+1} = Au_k$.

para determinar u_k, para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, empecemos por averiguar si la matriz A es diagonalizable:

```
>>format rat
>> eig(A,'nobalance')
ans =
-1/6
1

>> null(A+(1/6)*eye(2),'r')
ans =
-1
1

>> null(A-eye(2),'r')
ans =
3/4
1
```

Luego los valores propios de A son $\lambda_1 = -\frac{1}{6}$ y $\lambda_2 = 1$ y los respectivos espacios propios son $E_{\lambda_1} = gen\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ y $E_{\lambda_1} = gen\left\{\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. Por lo tanto la matriz A es diagonalizable como $P^{-1}AP = \Lambda$, con $P = \begin{pmatrix} -1 & 3/4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $\Lambda = \begin{pmatrix} -1/6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Como consecuencia, la solución de la ecuación en diferencias $u_{k+1} = Au_k$ está dada por

$$u_k \quad = \quad \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = c_1\lambda_1^k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\lambda_2^k \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad k \in \{0, 1, 2, 3...\}$$

donde $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ es la única solución del sistema $Pc = u_0$.

Resolvemos este sistema mediante la instrucción:

```
P =
-1.0000    0.7500
1.0000    1.0000

>> h=[420; 630];
>> P\h
ans =
30
600
```

Luego,

$$u_k \quad = \quad \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = 30\left(-\tfrac{1}{6}\right)^K \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 600\left(1^K\right) \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad k \in \{0, 1, 2, 3...\}$$

De donde se deduce que para $k \in \{0, 1, 2, 3...\}$ se tiene:

$$\begin{aligned} x_k &= -30(-1/6)^K + 450 \\ y_k &= 30\,(-1/6)^K + 600 \end{aligned}$$

Por lo tanto, a largo plazo, el número de empleados en la sucursal D será 450 y en la sucursal E será 600.

Solución de ejercicio 6:

Consideremos el espacio $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in R^4 : ax + by + dw = 0, \quad dx - cz + aw = 0 \right\}$.

$a)$ Una base para $H^\perp$ es $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ -c \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$.

$b)$ Para expresar el complemento ortogonal de H mediante restricciones sobre las componentes de sus vectores, hallemos primero una base de H.para luego encontrar las restricciones, teniendo en cuenta que un vector pertenece a $H^\perp$ si y sólo si dicho vector es ortogonal a cada vector de una base de H.

H es el espacio nulo de la matriz $B = \begin{pmatrix} a & b & 0 & d \\ d & -c & 0 & a \end{pmatrix}$. creamos esta matriz y hallamos su espacio nulo:

```
>>format rat
>> B=[a b 0 d; d -c 0 a]
B =
4   1   0   2
2   -3   0   4

>> null(B,'r')
ans =
[ 0,  -5/7]
[ 0,  6/7]
[ 1,  0]
[ 0,  1]
```

Luego, una base para el H es:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5/7 \\ 6/7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

De donde se deduce que

$$H^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : z = 0, \quad -5x + 6y + 7w = 0 \right\}$$

c) Si A es la matriz cuyas columnas son los elementos de la base β, en su orden, Entonces $A = B^T$, hallamos su factorización QR, mediante las siguientes instrucciones:

```
>> A=transpose(B)
A =
4    2
1    -3
0    0
2    4
>>format short
>> [Q R]=qr(A,0)
Q =
-0.8729    -0.1040
-0.2182    -0.7906
   0            0
-0.4364 0.6034
R =
-4.5826    -2.8368
   0           4.5774
```

Verifiquemos que las columnas de Q son ortogonales:

```
>> transpose(Q)*Q
ans =
1.0000    0
   0      1.0000
```

Ahora comprobemos que efectivamente $A = QR$.

```
>> Q*R
ans =
4.0000    2.0000
1.0000    -3.0000
   0           0
2.0000    4.0000
```

Luego, la factorización QR de la matriz A es $A = \begin{pmatrix} -0.8729 & -0.1040 \\ -0.2182 & -0.7906 \\ 0 & 0 \\ -0.4364 & 0.6034 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4.5826 & -2.8368 \\ 0 & 4.5774 \end{pmatrix}$

d) Una base ortonormal para $H^{\perp}$ está formada por los vectores que aparecen como columnas de Q, esa base es

$$\left\{ \begin{pmatrix} -0.8729 \\ -0.2182 \\ 0 \\ -0.4364 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.1040 \\ -0.7906 \\ 0 \\ 0.6034 \end{pmatrix} \right\}$$

e) La matriz de proyección ortogonal sobre H es $P = I_4 - P'$, donde P' es la matriz de proyección sobre $H^{\perp}$, es decir, $P' = QQ^T$, siendo Q una matriz cuyas columnas forman una base ortonormal para $H^{\perp}$. Calculamos $P\prime$ y P, así:

```
>> P1=Q*transpose(Q)
P1 =
0.7727   0.2727   0   0.3182
0.2727   0.6727   0   -0.3818
0        0        0   0
0.3182   -0.3818  0   0.5545
```

```
>> P=eye(4)-P1
P =
0.2273    -0.2727   0        -0.3182
-0.2727   0.3273    0        0.3818
0         0         1.0000   0
-0.3182   0.3818    0        0.4455
```

Luego, la matriz de proyección ortogonal sobre H es $P = \begin{pmatrix} 0.2273 & -0.2727 & 0 & -0.3182 \\ -0.2727 & 0.3273 & 0 & 0.3818 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0.3182 & 0.3818 & 0 & 0.4455 \end{pmatrix}$

f) Las componentes ortogonales del vector $e = \begin{pmatrix} a \\ b \\ -c \\ d \end{pmatrix}$ sobre H y $H^{\perp}$ son respectivamente la proyección de e sobre H y la proyección de e sobre $H^{\perp}$, es decir, Pe y $P'e$. Las calculamos como sigue:

```
>> e=[a; b; -c; d]
e =
4
1
-3
2
>> P*e
ans =
0.0000
0
-3.0000
0.0000
```

```
>> P1*e
ans =
4.0000
1.0000
0
2.0000
```

Por lo tanto, las componentes ortogonales del vector e sobre H y $H^{\perp}$ son respectivamente $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

g) La distancia del vector e al subespacio H es la magnitud de la proyección de e sobre $H^{\perp}$

>>norm(P1*e)
ans =
sqrt(21)
>> norm(P1*e)
ans =
4.5826
Luego, dicha distancia es $\sqrt{21} \approx 4.5826$.

Solución de ejercicio 7:

Creamos los vectores $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ -a \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} a^2 \\ ab \\ a^2+b^2 \end{pmatrix},$

así:
>> v1=[a;b;-a]
v1 =
4
1
-4

>> v2=[-b;a;0]
v2 =
-1
4
0

>> v3=[a^2; a*b;a^2+b^2]
v3 =
16
4
17

Ahora, suponiendo que A es la matriz cuyos valores propios (eigenvalores) son m y $-n$ y sus respectivos espacios propios (eigenespacios) son: para m el espacio generado por v_1 y para $-n$ el espacio generado por los vectores v_2 y v_3, procedemos a resolver lo propuesto en cada literal:

a) Comprobamos que A es diagonalizable ortogonalmente, verificando que sus espacios propios son mutuamente ortogonales y la suma de sus dimensiones es igual al orden de la matriz A.

veamos si v2 y v3 son L.I.:

>> N=[v2 v3]
N =
-1 16
4 4
0 17

>> rref(N)
ans =
1 0
0 1
0 0

Luego v2 y v3 sí son L.I.
Ahora verifiquemos ortogonalidad:

>> dot(v1,v2)
ans =
0
>> dot(v1,v3)
ans =
0

Luego, cada vector del espacio propio asociado al valor propio m es ortogonal a todos los vectores propios asociados al valor propio $-n$, es decir, los espacio propios de A son mutuamente ortogonales.

De lo anterior se concluye que la matriz A es diagonalizable ortogonalmente.
Para encontrar la descomposición espectral de la matriz A necesitamos hallar las matrices de proyección ortognal sobre sus diferentes espacios propios:

La matriz de proyección ortogonal sobre el espacio propio de valor propio m es $P1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}\left(\frac{v_1}{\|v_1\|}\right)^T = \frac{v_1 v_1^T}{\|v_1\|^2} = \frac{v_1 v_1^T}{v_1 . v_1}$, y la matriz de proyección ortognal sobre el espacio propio de valor propio $-n$ es $P2 = I_3 - P1$. Las hallamos así:

>>format rat
>> P1=v1*transpose(v1))/dot(v1,v1)
P1 =
[16/33, 4/33, -16/33]
[4/33, 1/33, -4/33]
[-16/33, -4/33, 16/33]
>> P2=eye(3)-P1
P2=
[17/33, -4/33, 16/33]
[-4/33, 32/33, 4/33]
[16/33, 4/33, 17/33]

Luego, la descomposición espectral de A es:

$$A = mP1 - nP2 = 4\left(\frac{1}{33}\right)\begin{pmatrix} 16 & 4 & -16 \\ 4 & 1 & -4 \\ -16 & -4 & 16 \end{pmatrix} - 3\left(\frac{1}{33}\right)\begin{pmatrix} 17 & -4 & 16 \\ -4 & 32 & 4 \\ 16 & 4 & 17 \end{pmatrix}$$

b) Si $h = \begin{pmatrix} a+1 \\ b-3 \\ a+4 \end{pmatrix}$, la proyección ortogonal del vector Ah sobre el espacio propio asociado al valor propio $-n$ es $(-n)$ veces la proyección de h sobre dicho espacio, es decir, $P2h$. Hallémosla:

```
>>format rat
>>P2*[a+1;b-3;a+4]

ans =
221/33
-52/33
208/33
```

Luego dicha proyección es $\frac{1}{33}\begin{pmatrix} 221 \\ -52 \\ 208 \end{pmatrix}$

c) Calculamos la matriz A aprovechando su descomposición espectral así:

```
>> m*P1-n*P2
ans =
[ 13/33,  28/33,  -112/33]
[ 28/33,  -92/33,  -28/33]
[ -112/33,  -28/33,  13/33]
```

Luego,

$$A = \frac{1}{33}\begin{pmatrix} 13 & 28 & -112 \\ 28 & -92 & -28 \\ -112 & -28 & 13 \end{pmatrix}$$