Álgebra Lineal

Taller N°3 con Matlab

Tema: Espacios vectoriales y subespacios. Independencia lineal. Coordenadas, bases y dimensión. Cambio de Base. Transformaciones lineales.

Diseñado por Rosa Franco Arbeláez.

Generar ocho números aleatorios enteros positivos a, b, c, d, e, f, m y n. Utilizar estos números en los ejercicios 1, 2, 3 y 4. En los ejercicio 5 y 6, considere que e, f, m y n son los números generados pero a, b, c y d son genéricos.

Ejercicio 1

Parte 1: Considere las matrices siguientes

$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & m & n \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} -a & -c & 3a \\ 5b & -c & a \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} a & 2b-c & 2c+3a \\ 5b & 2m-c & 2n+a \end{pmatrix}$

a) Halle el subespacio de $\mathbb{R}_{2\times 3}$ generado por $\{A,\ B,\ C\}$

b) Determine si la matriz $M = \begin{pmatrix} -am-an & 2cn-cm-3bn & 3am-6an-3cn \\ 5bm-10bn & 2cn-cm-3mn & -3n^2-2an+am \end{pmatrix}$ es una combinación lineal de los elementos del conjunto dado en a) y, en caso afirmativo, encuentre todas las combinaciones lineales de dichos elementos que producen la matriz M.

Parte 2: Halle el subespacio de $P_2(x)$ generado por $\{n,\ mx+nx^2\}$ y determine cuál de los siguientes polinomios **no pertenece** a dicho subespacio.

a) $3n+nx+\frac{1}{m}n^2+1x^2$
b) $mn+m^2x+mnx^2$
c) $n^2+mnx+n^2x^2$

Ejercicio 2

Determine si los siguientes conjuntos, son linealmente independientes (o linealmente dependientes) en el correspondiente espacio vectorial. Para aquellos que sean linealmente dependientes, encuentre todas las posibles combinaciones lineales de sus vectores que producen el vector cero y exprese uno de los elementos como combinación lineal de los otros. Determine además si el conjunto dado es una base para el respectivo espacio vectorial.

a) $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & -c \\ 0 & -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a+b & a+b-c \\ c-a & b-a \end{pmatrix}\right\}$, V es el conjunto de las matrices de orden2 y componentes reales.

b) $\{n,\ ax+ax^2,\ bx-cx^3, ac+bdx+acx^2-cdx^3\}$, $V = P_3(x)$

Ejercicio 3

a) Compruebe que $\beta = \{b,\ a+bx,\ cx^2,\ ax^3\}$ es una base para $P_3(x)$ y determine el vector de coordenadas de $an+bm+bnx-cdx^2-amx^3$ con respecto a la base β.

b) Suponga que C es una base de $P_3(x)$ tal que la matriz de cambio de la base β, descrita en el literal a), a la base C es $\begin{pmatrix} -a & b & 0 & 0 \\ 0 & -c & a & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -a & b \end{pmatrix}$ y halle el vector de coordenads de $an+bm+bnx-cdx^2-amx^3$ con respecto a la base C.

c) Dadas las condiciones de los literales a) y b), determine cuál es la base C.

Ejercicio 4

Dadas las bases $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a+b & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2b+c \end{pmatrix} \right\}$ y $C = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b \\ a+b & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \right\}$ para el espacio vectorial de las matrices de orden 2 y componentes reales, hallar:

a) La matriz de cambio de la base β a la base C.

b) El vector coordenado de $\begin{pmatrix} am & bd \\ n(a+b) & -m(a-b) \end{pmatrix}$ con respecto a la base β, descrita en el literal a).

c) Utilice la matriz del cambio de la base β a la base C, descrita en el literal a), para determinar el vector coordenado de $\begin{pmatrix} am & bd \\ n(a+b) & -m(a-b) \end{pmatrix}$ con respecto a la base C.

Ejercicio 5

En cada literal considere las transformaciones lineales dadas a continuación.

$L : \mathbb{R}^3 \to P_2$ definida por $L\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (a+b) + (b+c)\,x + ax^2$

$T : \mathbb{R}^3 \to P_2$ definida por $T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a + bx + cx^2$

$S : P_2 \to P_1$ definida por $S(a+bx+cx^2) = b + 2cx$

a) Encuentre las matrices de las transformaciónes dadas, relativas a las bases estándar.

b) Encuentre $S \circ (mT + nL)\begin{pmatrix} -2f \\ e \\ f \end{pmatrix}$.

c) Determine si la transformación L es invertible y, en caso afirmativo, halle su inversa.

Ejercicio 6.

Considere el espacio S de las matrices simétricas de orden 2 y componentes reales, la transformación lineal $T : S \to \mathcal{P}_2$ definida por $T\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = (a-d) + 2bx + (d-a)\,x^2$ y las bases β y $\mathcal{C}$ de S y $\mathcal{P}_2$ respectivamente, dadas por

$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $\mathcal{C} = \{1+x,\ x+x^2,\ \ 1+x^2\}$

Halle la matriz de T con respecto a las bases β y $\mathcal{C}$.

Solución con Matlab

Solución de ejercicio 1

Generamos ocho números aleatorios y los nombramos como sigue:

```
>> v=fix(10*rand(1,8))
v =
4 9 4 4 8 5 2 6
>> a=v(1); b=v(2); c=v(3); d=v(4); e=v(5); f=v(6); m=v(7); n=v(8);
```

Parte 1: Creamos las matrices A, B y C :

```
>> A=[a b c; 0 m n];
>> B=[-a -c 3*a; 5*b -c a];
>> C=[a 2*b-c 2*c+3*a; 5*b 2*m-c 2*n+a];
```

a) El subespacio de $\mathbb{R}_{2\times 3}$ generado por $\{A,\ B,\ C\}$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales de las matrices A, B, C, es decir, el conjunto de elementos de la forma

$$xA + yB + zC$$

donde x, y, z son números reales. Para determinar su caracterización, procedemos como sigue:

```
>> syms x y z
>> x*A+y*B+z*C
ans =
[ 4*x-4*y+4*z, 9*x-4*y+14*z, 4*x+12*y+20*z]
[ 45*y+45*z, 2*x-4*y, 6*x+4*y+16*z]
```

Luego el subespacio de $\mathbb{R}_{2\times 3}$ generado por $\{A,\ B,\ C\}$ es el conjuto

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4x-4y+4z & 9x-4y+14z & 4x+12y+20z \\ 45x+45z & 2x-4y & 6x+4y+16z \end{pmatrix} : x, y, z \text{ son números reales} \right\}$$

b) Creamos la matriz M, así:

```
>> M=[-a*m-a*n 2*c*n-c*m-3*b*n 3*a*m-6*a*n-3*c*n; 5*b*m-10*b*n 2*c*n-c*m-3*m*n -3*n^2-2*a*n+a*m]
M =
-32 -122 -192
-450 4 -148
```

Para determinar si esta matriz es una combinación lineal de los elementos del conjunto dado en a) y hallar todas las formas de expresarla, debemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} 4x-4y+4z &= -32 \\ 9x-4y+14z &= -122 \\ 4x+12y+20z &= -192 \\ 45x+45z &= -450 \\ 2x-4y &= 4 \\ 6x+4y+16z &= -148 \end{aligned}$$

O equivalentemente, la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 \\ 9 & -4 & 14 \\ 4 & 12 & 20 \\ 45 & 0 & 45 \\ 2 & -4 & 0 \\ 6 & 4 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -32 \\ -122 \\ -192 \\ -450 \\ 4 \\ -148 \end{pmatrix}$$

Nótese que las componentes de las columnas 1, 2 y 3 de la matriz de coeficientes son respectivamente las componentes de las matrices A, B y C. Construimos en matlab la matriz K de coeficientes y el vector u de términos independientes como sigue:

```
>> S=[A(1,:)  A(2,:);    B(1,:)  B(2,:);    C(1,:)  C(2,:)]
S =
4   9   4   0   2   6
-4  -4   12   45  -4   4
4  14   20   45   0   16
>>K= transpose(S)
ans =
4   -4   4
9   -4   14
4   12   20
0   45   45
2   -4   0
6   4   16
```

```
>> u=transpose([M(1,:) M(2,:)])
u =
-32
-122
-192
-450
4
-148
>>
```

Ahora resolvemos el sistema de ecuaciones así:

Obtenemos una solución particular del sistema $KX = u$, mediante la función:

```
>> linsolve(K,u)
ans =
0
-1.0000
-9.0000
```

Luego, una solución particular es $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -9 \end{pmatrix}$

Verificación:
>> K*ans
ans =
-32.0000
-122.0000
-192.0000
-450.0000
4.0000
-148.0000

Ahora hallamos la solución general del sistema homogéneo $KX = 0$, hallando una base para el espacio nulo de la matriz K, así:

>> null(K,'r')
ans =
-2
-1
1

Luego el espacio nulo de K es el generado por el vector $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, es decir, cada solución del sistema $KX = 0$ es de la forma $t\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, con $t \in \mathbb{R}$.

De lo anterior se concluye que la solución general del sistema $KX = u$ está dada por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -9 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto, todas las posibles combinaciones lineales de las matrices A, B y C que producen la matriz M son:

$$M = (-2t)\,A + (-1-t)B + (-9+t)C, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Parte 2: Para hallar el subespacio de $P_2(x)$ generado por $\left\{n,\ mx + nx^2\right\}$ determinamos los polinomios de la forma $\alpha_1 n + \alpha_2\left(mx + nx^2\right)$, con α_1 y α_2 en $\mathbb{R}$, así:

>> syms a1 a2 x
>> Expand(a1*n+a2*(m*x+n*x^2))
ans =
6*a1+2*a2*x+6*a2*x^2

Luego el subespacio generado por $\left\{n,\ mx + nx^2\right\}$ está dado por

$$\left\{6\alpha_1 + 2\alpha_2 x + 6\alpha_2 x^2 : \alpha_1 \text{ y } \alpha_2 \text{ en } \mathbb{R}\right\}$$

O equivalentemente, por

$$\left\{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 : b_0,\ b_1\ ,b_2 \text{ son números reales tales que } b_2 = 3b_1\right\}$$

Para determinar cuál de los polinomios **no pertenece** a dicho subespacio, basta con observar los coeficientes de x y x^2 en cada uno de ellos:

Construimos los polinomios dados así:

```
>> sym x
ans =
x

>> 3*n+n*x+((n^2/m)+1)*(x^2)
ans =
18+6*x+19*x^2
>> m*n+m^2*x+m*n*x^2
ans =
12+4*x+12*x^2
>> n^2+m*n*x+(n^2)*x^2
ans =
36+12*x+36*x^2
```

De donde podemos observar que el primer polinomio no satisface la condición y por lo tanto no pertenece al subespacio descrito, en cambio en los otros dos polinomios el coeficiente de x^2 es 3 veces el coeficiente de x y por lo tanto dichos polinomios sí pertenecen al subespacio

Solución de ejercicio 2.

a) $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & -c \\ 0 & -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a+b & a+b-c \\ c-a & b-a \end{pmatrix} \right\}$, V es el conjunto de las matrices de orden2 y componentes reales.

Para determinar si este conjunto es L.I., consideremos escalares x, y, z, w tales que

$$x \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b & -c \\ 0 & -a \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & b \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} a+b & a+b-c \\ c-a & b-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

o equivalentemente

$$\begin{pmatrix} w\,(a+b) + ax + by & w\,(a+b-c) + bx + az - cy \\ cx - az - w\,(a-c) & bz - ay - w\,(a-b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Debemos determinar si x, y, z, w tienen que ser todos iguales a cero o si, por el contrario, hay infinitas soluciones para el sistema. Para ello consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} ax + by + (a+b)\,w &= 0 \\ bx - cy + az + (a+b-c)w &= 0 \\ cx - az + (c-a)w &= 0 \\ -ay + bz + (b-a)w &= 0 \end{aligned}$$

Construimos la matriz de coeficientes así:

```
>>A=[a b 0 a+b; b -c a a+b-c; c 0 -a c-a; 0 -a b b-a]
```

ans =
4 9 0 13
9 -4 4 9
4 0 -4 0
0 -4 9 5

Hallamos la matriz escalonada reducida por renglón, para la matriz A, mediante la función
>> rref(A)
ans =
1 0 0 1
0 1 0 1
0 0 1 1
0 0 0 0

Observamos que la forma reducida de renglón escalonado no tiene un 1 principal (pivote) en la cuarta columna, por lo tanto el sistema posee una variable libre y como consecuencia posee infinitas soluciones. Luego, el conjunto dado es linealmente dependiente.

Como el conjunto es L.D. existen infinitas combinaciones lineales de sus elementos que producen el vector cero. Para hallarlas, es necesario conocer todas las soluciones de la ecuación 1 o equivalentemente, del sistema $AX = 0$,

De la forma reducida de renglón escalonado, se deduce que la solución general del sistema $AX = 0$ es $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ y por lo tanto todas las combinaciones lineales de elementos del conjunto S que producen el vector cero de $\mathbb{R}_{2\times 2}$ son de la forma

$-t\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} - t\begin{pmatrix} b & -c \\ 0 & -a \end{pmatrix} - t\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & b \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} a+b & a+b-c \\ c-a & b-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, para cada $t \in \mathbb{R}$.

Por ejemplo, considerando $t = 1$, observamos que la cuarta matriz es la suma de las otras tres.

Claramente el conjunto S no es una base para $\mathbb{R}_{2\times 2}$, por no ser L.I.

b) $S = \left\{n,\ ax + ax^2,\ bx - cx^3, ac + bdx + acx^2 - cdx^3\right\}$, $V = P_3(x)$

Consideremos escalares α, β, γ , δ tales que

$$c_1(n) + c_2\left(\ ax + ax^2\right) + c_3\left(\ bx - cx^3\right) + c_4\left(ac + bdx + acx^2 - cdx^3\right) = 0$$

Expandimos el término de la izquierda, así:

```
>> syms a b c d n c1 c2 c3 c4 x
>> Expand(c1*n+c2*(a*x+a*x^2)+c3*(b*x-c*x^3)+c4*((a*c+b*d)*x+a*c*x^2-c*d*x^3))
ans =
n*c1+c2*a*x+c2*a*x^2+c3*b*x-c3*c*x^3+c4*x*a*c+c4*x*b*d+c4*a*c*x^2-c4*c*d*x^3
```

Ahora reagrupamos términos semejantes mediante la función collect aplicada a la respuesta anterior, así:

```
>> collect(ans)
ans =
(-c3*c-c4*c*d)*x^3+(c2*a+c4*a*c)*x^2+(c2*a+c4*b*d+c3*b+c4*a*c)*x+n*c1
```

Luego, este polinomio es igual al polinomio cero si se satisaface:

$$
\begin{aligned}
-cc_3 - cdc_4 &= 0\\
ac_2 + acc_4 &= 0\\
ac_2 + bc_3 + (ac + bd)\, c_4 &= 0\\
nc_1 &= 0
\end{aligned}
$$

Para resolver este sistema homogéneo, recordemos ahora los valores de a,b,c,d y n y construyamos la matriz de coefcientes, así:

```
>> a=v(1);b=v(2);c=v(3);d=v(4); n=v(8);
```

>>A= [0 0 -c -c*d; 0 a 0 a*c; 0 a b a*c+b*d; n 0 0 0]
A =

0	0	-4	-16
0	4	0	16
0	4	9	52
6	0	0	0

Finalmente, llevamos la matriz A a la forma reducida de renglón escalonado:

>> rref(ans)
ans =

1	0	0	0
0	1	0	4
0	0	1	4
0	0	0	0

Donde observamos que la cuarta columna no tiene un 1 principal y por lo tanto el sistema tiene infinitas soluciones y el conjunto S es L.D. Además vemos que la solución general del sistema $AX = 0$ es

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Luego, todas las combinaciones lineales de los elementos de S que producen el vetor cero son:

$$0n - 4t\ \left(ax + ax^2\right) - 4t\left(bx - cx^3\right) + t\left(ac + bdx + acx^2 - cdx^3\right) = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Considerando, por ejemplo, $t = 1$, obtenemos
$\left(ac + bdx + acx^2 - cdx^3\right) = 4\ \left(ax + ax^2\right) + 4\left(bx - cx^3\right).$
O también $\left(ax + ax^2\right) = \frac{1}{4}\left(ac + bdx + acx^2 - cdx^3\right) - \left(bx - cx^3\right).$
El conjunto S no es una base para $P_3(x)$, porque no es L.I.

Solución de ejercicio 3

a) Dado que el número de elementos de $\beta = \left\{b,\ a + bx,\ cx^2,\ ax^3\right\}$ es igual a la dimensión de $P_3(x)$, para saber si β es base de $P_3(x)$ basta con determinar si β es L.I.

Veamos:

$$c_1 b + c_2\left(a + bx\right) + c_3 cx^2 + c_4 ax^3 = 0$$

únicamente si:

$$bc_1 + ac_2 = 0, \quad bc_2 = 0, \quad cc_3 = 0, \quad ac_4 = 0$$

o equivalentemente, si $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$

Luego, $\beta \subset P_3(x)$, β es L.I. y número de elementos de $\beta = \dim P_3(x)$. Es decir, β es una base para $P_3(x)$.

Ahora determinemos el vector de coordenadas de $an + bm + bnx - cdx^2 - amx^3$ con respecto a la base β :

$$c_1 b + c_2\left(a + bx\right) + c_3 cx^2 + c_4 ax^3 = an + bm + bnx - cdx^2 - amx^3$$

sólo si:

$$bc_1 + ac_2 = an + bm, \quad bc_2 = bn, \quad cc_3 = -cd, \quad ac_4 = -am$$

De donde se deduce que $c_2 = n, \quad c_3 = -d, \quad c_4 = -m$ y $c_1 = m$

Luego el vector de coordenadas del polinomio dado con respecto a la base β es $\begin{pmatrix} m \\ n \\ -d \\ -m \end{pmatrix}$.

b) Suponiendo que C es una base de $P_3(x)$ tal que la matriz de cambio de la base β, descrita en el literal *a*), a la base C es $\begin{pmatrix} -a & b & 0 & 0 \\ 0 & -c & a & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -a & b \end{pmatrix}$, el vector de coordenads de $an+bm+bnx-cdx^2-amx^3$ con respecto a la base C, está dado por

$$\begin{pmatrix} -a & b & 0 & 0 \\ 0 & -c & a & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \\ -d \\ -m \end{pmatrix}$$

Hallemos este producto:

```
>> A=[-a b 0 0; 0 -c a 0;0 0 a b;0 0 -a b]
A =
-4   9   0   0
0   -4   4   0
0   0   4   9
0   0   -4   9
>> A*[m; n; -d; -m]
ans =
46
-40
-34
-2
```

Luego, $\left[an + bm + bnx - cdx^2 - amx^3\right]_C = \begin{pmatrix} 46 \\ -40 \\ -34 \\ -2 \end{pmatrix}$

c) Dadas las condiciones de los literales *a*) y *b*), para determinar cuál es la base C, tenemos en cuenta que las columnas de la matriz de cambio de β a C son los vectores de coordenadas de los elementos de la base β con respecto a la base C y las columnas de la matriz inversa (matriz de cambio de la base C a la base β) son los vectores de coordenadas de los elementos de C con respecto a la base β. En primer lugar debemos hallar la inversa de la matriz dada:

```
>>format rat
>>B=inv(A)
B =
[ -1/4,  -9/16,  9/32,  -9/32]
[ 0,  -1/4,  1/8,  -1/8]
[ 0,  0,  1/8,  -1/8]
```

[0, 0, 1/18, 1/18]

Luego la matriz de cambio de la base C a la base β es $B = \begin{pmatrix} -1/4 & -9/16 & 9/32 & -9/32 \\ 0 & -1/4 & 1/8 & -1/8 \\ 0 & 0 & 1/8 & -1/8 \\ 0 & 0 & 1/18 & 1/18 \end{pmatrix}$

Luego si $p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4$ son los elementos de la base C se tiene:$[p_1]_\beta = \text{col}(B,1) = \begin{pmatrix} -1/4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$[p_2]_\beta = \text{col}(B,2) = \begin{pmatrix} -9/16 \\ -1/4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $[p_3]_\beta = \text{col}(B,3) = \begin{pmatrix} 9/32 \\ 1/8 \\ 1/8 \\ 1/18 \end{pmatrix}$, $[p_4]_\beta = \text{col}(B,4) = \begin{pmatrix} -9/32 \\ -1/8 \\ -1/8 \\ 1/18 \end{pmatrix}$.

Luego:
$p_1 = -\frac{1}{4}b$
$p_2 = -\frac{9}{16}b - \frac{1}{4}(a+bx)$
$p_3 = \frac{9}{32}b + \frac{1}{8}(a+bx) + \frac{1}{8}cx^2 + \frac{1}{18}ax^3$
$p_4 = -\frac{9}{32}b - \frac{1}{8}(a+bx) - \frac{1}{8}cx^2 + \frac{1}{18}ax^3$

Simplificamos estos polinomios como sigue:

```
>>format rat
>>p1=-(1/4)*b
p1 =
-9/4

>> syms x
>> p2=-(9/16)*b+(1/8)*(a+b*x)+(1/8)*c*x^2+(1/18)*a*x^3
p2=
-73/16+9/8*x+1/2*x^2+2/9*x^3
>> p3=(9/32)*b+(1/8)*(a+b*x)+(1/8)*c*x^2+(1/18)*a*x^3
p3=
97/32+9/8*x+1/2*x^2+2/9*x^3

>> p4=-(9/32)*b-(1/8)*(a+b*x)-(1/8)*c*x^2+(1/18)*a*x^3
p4 =
-97/32-9/8*x-1/2*x^2+2/9*x^3
```

Luego,
$C = \left\{-\frac{9}{4},\quad -\frac{73}{16} + \frac{9}{8}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{9}x^3,\quad \frac{97}{32} + \frac{9}{8}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{9}x^3,\quad -\frac{97}{32} - \frac{9}{8}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{9}x^3\right\}$

Solución de ejercicio 4:

Dadas las bases $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a+b & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2b+c \end{pmatrix} \right\}$ y $C = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b \\ a+b & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \right\}$ para el espacio vectorial de las matrices de orden 2 y componentes reales, hallar:

a) Para hallar la matriz de cambio de la base β a la base C, expresemos cada vector de la base β como combinación lineal de los vectores de la base C:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & b \\ a+b & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & b \\ a+b & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a+b & 0 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & b \\ a+b & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2b+c \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & b \\ a+b & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

Hallamos $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$, para cada una de las ecuaciones matriciales anteriores, resolviendo los siguientes sistemas de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{ccc} ax_1 & = & a \\ bx_1 + bx_2 + bx_3 & = & 0 \\ (a+b)x_2 & = & 0 \\ cx_4 & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} ax_1 & = & 0 \\ bx_1 + bx_2 + bx_3 & = & b \\ (a+b)x_2 & = & 0 \\ cx_4 & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} ax_1 & = & 0 \\ bx_1 + bx_2 + bx_3 & = & 0 \\ (a+b)x_2 & = & a+b \\ cx_4 & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} ax_1 & = & 0 \\ bx_1 + bx_2 + bx_3 & = & 0 \\ (a+b)x_2 & = & 0 \\ cx_4 & = & 2b+c \end{array}$$

Dado que todos estos sistemas tienen la misma matriz de coeficientes, sus soluciones se pueden obtener simultáneamente, mediante las siguientes instrucciones:

```
>>format rat
>> M=[a 0 0 0 a 0 0 0; b b b 0 0 b 0 0; 0 a+b 0 0 0 0 a+b 0; 0 0 0 c 0 0 0 2*b+c]
M =
4   0   0   0   4   0   0   0
9   9   9   0   0   9   0   0
0   13  0   0   0   0   13  0
0   0   0   4   0   0   0   22

>> N=rref(M)
N=
[ 1,  0,  0,  0,  1,  0,  0,  0]
[ 0,  1,  0,  0,  0,  0,  1,  0]
[ 0,  0,  1,  0,  -1,  1,  -1,  0]
[ 0,  0,  0,  1,  0,  0,  0,  11/2]
```

P=N(:,[5,6,7,8])
P =
[1, 0, 0, 0]
[0, 0, 1, 0]
[-1, 1, -1, 0]
[0, 0, 0, 11/2]
De donde se deduce que la matriz de cambio de la base β a la base C es

$$P_{C\leftarrow\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{11}{2} \end{pmatrix}$$

b) Para hallar el vector coordenado de $\begin{pmatrix} am & bd \\ n\,(a+b) & -m\,(a-b) \end{pmatrix}$ con respecto a la base β, descrita en el literal a), debemos resolver la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} am & bd \\ n\,(a+b) & -m\,(a-b) \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a+b & 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2b+c \end{pmatrix}$$

O, equivalentemente, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{ccc} ax_1 & = & am \\ bx_2 & = & bd \\ (a+b)x_3 & = & n(a+b) \\ (2b+c)x_4 & = & -m(a-b) \end{array}$$

De donde obtenemos

$$x_1 = m, \quad x_2 = d, \quad x_3 = n, \quad x_4 = -\frac{m(a-b)}{2b+c}$$

Calculemos el vector de coordenadas:

```
>>format rat
>> f=[m;d; n; -m*(a-b)/(2*b+c)]
f =
2
4
6
5/11
```

Luego el vector de coordenadas de la matriz dada con respecto a la base β es

$$\left[\begin{pmatrix} am & bd \\ n\,(a+b) & -m\,(a-b) \end{pmatrix}\right]_\beta = \begin{pmatrix} m \\ d \\ n \\ -\frac{m(a-b)}{2b+c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 5/11 \end{pmatrix}$$

c) Utilizamos la matriz del cambio de la base β a la base C, descrita en el literal a), para determinar el vector de coordenadas de $\begin{pmatrix} am & bd \\ n\,(a+b) & -m\,(a-b) \end{pmatrix}$ con respecto a la base C, así*:*

$$\left[\begin{pmatrix} am & bd \\ n\,(a+b) & -m\,(a-b) \end{pmatrix}\right]_C = P_{C\leftarrow\beta}\left[\begin{pmatrix} am & bd \\ n\,(a+b) & -m\,(a-b) \end{pmatrix}\right]_\beta$$

>> P*f
ans =
2
6
-4
5/2
Luego,

$$\left[\begin{pmatrix} am & bd \\ n\,(a+b) & -m\,(a-b) \end{pmatrix}\right]_C = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -4 \\ 5/2 \end{pmatrix}$$

Solución de Ejercicio 5

Consideremos las transformaciones lineales

$L : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_2$ definida por $L\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (a+b) + (b+c)\,x + ax^2$

$T : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_2$ definida por $T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a + bx + cx^2$

$S : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_1$ definida por $S(a + bx + cx^2) = b + 2cx$

a)

i) $\beta = \{e_1,\ e_2,\ e_3\}$ y $C = \{1,\ x,\ x^2\}$ son las bases estándar de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{P}_2$ respectivamente. Las columnas de la matriz de la transformación L son

$$[L(e_1)]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad [L(e_2)]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [L(e_3)]_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego, $[L]_{C\leftarrow\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ii) $\beta = \{e_1,\ e_2,\ e_3\}$ y $C = \{1,\ x,\ x^2\}$ son las bases estándar de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{P}_2$ respectivamente. Las columnas de la matriz de la transformación T con respecto a las bases β y C son:

$$[T(e_1)]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [T(e_2)]_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [T(e_3)]_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego, $[T]_{C\leftarrow\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

iii) $C = \{1,\ x,\ x^2\}$ y $\eta = \{1,\ x\}$son las bases estándar de P_2 y P_1 respectivamente. Las columnas de la matriz de la transformación S con respecto a las bases β y C son

$$[S(1)]_\eta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [S(x)]_\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [S(e_3)]_\eta = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Luego $[S]_{\eta \leftarrow C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Para hallar $S \circ (mT + nL) \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$, hallamos primero la matriz de esta transformación dada por:

$$[S \circ (mT + nL)]_{C \leftarrow \beta} = [S]_{\eta \leftarrow C} [mT + nL]_{C \leftarrow \beta} = [S]_{\eta \leftarrow C} \left(m [T]_{C \leftarrow \beta} + n [L]_{C \leftarrow \beta} \right)$$

Para calcularla procedemos como sigue:

```
>> A=[0 1 0; 0 0 2]
A =
0   1   0
0   0   2
>> B=eye(3)
B =
1   0   0
0   1   0
0   0   1
>> D=[1 1 0; 0 1 1; 1 0 0]
D =
1   1   0
0   1   1
1   0   0
>> M=A*(m*B+n*D)
M =
0   8   6
12   0   4
```

Luego la matriz de la transformación $S \circ (mT + nL)$ es $\begin{pmatrix} 0 & 8 & 6 \\ 12 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ y por lo tanto

$$\left[S \circ (mT + nL) \begin{pmatrix} -2f \\ e \\ f \end{pmatrix} \right]_\eta = [S \circ (mT + nL)]_{\eta \leftarrow \beta} \left[\begin{pmatrix} -2f \\ e \\ f \end{pmatrix} \right]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 6 \\ 12 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2f \\ e \\ f \end{pmatrix}$$

Calculamos este producto así:

```
>> M*[-2*f; e; f]
ans =
94
-100
```

Luego $\left[S \circ (mT + nL) \begin{pmatrix} -2f \\ e \\ f \end{pmatrix} \right]_{\eta} = \begin{pmatrix} 94 \\ -100 \end{pmatrix}$ y por lo tanto,

$$S \circ (mT + nL) \begin{pmatrix} -2f \\ e \\ f \end{pmatrix} = 94 - 100x$$

c) Para determinar si la transformación L es invertible y, en caso afirmativo, halle su inversa, debemos ver si $[L]_{C \leftarrow \beta}$ es invertible y en tal caso $\left[L^{-1}\right]_{\beta \leftarrow C} = \left([L]_{C \leftarrow \beta}\right)^{-1}$. Procedemos entonces como sigue:

```
>> det(D)
ans =
1
```

Como el determinante de la matriz D, o equivalentemente de $[L]_{C \leftarrow \beta}$, es diferente de cero entonces la transformación L sí es invertible.

```
>> inv(D)
ans =
0   0   1
1   0   -1
-1  1   1
```

Luego $\left[L^{-1}\right]_{\beta \leftarrow C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

De donde se deduce que:

$$L^{-1}(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad L^{-1}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad L^{-1}(x^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $L^{-1}(a + bx + cx^2) = a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ a - c \\ b - a + c \end{pmatrix}$

Solución de ejercicio 6

S : conjunto de las matrices simétricas de orden 2 y componentes reales.
$T : S \to \mathcal{P}_2$ definida por $T \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = (a - d) + 2bx + (d - a)\, x^2$.
$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ base de S.
$\mathcal{C} = \left\{1 + x,\ x + x^2,\ 1 + x^2\right\}$ base de $\mathcal{P}_2$.

Hallemos la matriz de T con respecto a las bases β y $\mathcal{C}$:

$$T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 - x^2, \qquad T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2x, \qquad T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1 + x^2$$

Hallemos los vectores de coordenadas de estas imágenes con respecto a la base $\mathcal{C}$:
Para el primer vector:

$$1 - x^2 = \alpha_1(1+x) + \alpha_2(x+x^2) + \alpha_3(1+x^2)$$

para los valores de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ que satisfagan el sistema

$$\begin{array}{rcr} \alpha_1 + \alpha_3 & = & 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & = & 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 & = & -1 \end{array}$$

Para el segundo vector:

$$2x = \alpha_1(1+x) + \alpha_2(x+x^2) + \alpha_3(1+x^2)$$

para los valores de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ que satisfagan el sistema

$$\begin{array}{rcr} \alpha_1 + \alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & = & 2 \\ \alpha_2 + \alpha_3 & = & 0 \end{array}$$

Para el tercer vector:

$$-1 + x^2 = \alpha_1(1+x) + \alpha_2(x+x^2) + \alpha_3(1+x^2)$$

para los valores de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ que satisfagan el sistema

$$\begin{array}{rcr} \alpha_1 + \alpha_3 & = & -1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & = & 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 & = & 1 \end{array}$$

Resolvemos simultáneamente estos sistemas como sigue:

```
>> M=[1 0 1 1 0 -1; 1 1 0 0 2 0; 0 1 1 -1 0 1]
M =
1   0   1   1   0   -1
1   1   0   0   2   0
0   1   1   -1   0   1
>> rref(M)
ans =
1   0   0   1   1   -1
0   1   0   -1   1   1
0   0   1   0   -1   0
```

Luego,

$$[T]_{C \leftarrow \beta} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$