Tercer Examen Parcial de Álgebra Lineal - A
6 de Abril de 2019

Puntaje. Sólo para uso Oficial

I. 1-6 (40)	II. 7 (20)	III. 8 (20)	III. 9 (20)	**TOTAL** (100)	**NOTA** (5.0)

Instrucciones: La duración del examen es de 1 hora y 50 minutos. El examen consta de 8 y 3 preguntas en dos partes y tres hojas impresas por ambos lados. Verifique que su examen esté completo y consérvelo con el gancho. En las preguntas con procedimiento justifique sus respuestas en los espacios asignados. No está permitido sacar hojas en blanco ni ningún tipo de apuntes durante el examen. Verifique que su celular esté apagado. No se permite el uso de calculadora.

IDENTIFICACIÓN

Nombre: ____________________ Cédula __________

Profesor: ____________________ Grupo __________

Espacio para completar respuestas o borrador. Marque claramente si hay respuestas en este espacio.
No voltee esta hoja hasta ser AUTORIZADO por el encargado de salón.

I. Completación

En las preguntas 1 a 5 complete los recuadros. **NOTA**: En esta sección se califica sólo la respuesta y no se tiene en cuenta el procedimiento. Revise su respuesta.

1. Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

   (a) [5pts] Determine los valores propios de A:

   $\{\text{valores propios de } A\} = \Big\{ \qquad \Big\}$

   (b) [5pts] Determine los valores propios de A^3:

   $\{\text{valores propios de } A^3\} = \Big\{ \qquad \Big\}$

2. [5pts] Sea $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$. ¿Pára que valores de α es $\mathcal{B}$ un conjunto ortogonal?

   $\alpha =$

3. [5pts] Dibuje en el recuadro un grafo cuya matriz de adyacencia sea $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

4. [5pts] Sea $W = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$, y sea $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ -2 \end{bmatrix}$. Calcule la proyección ortogonal de v sobre W.

   $\text{proy}_W(v) =$

5. [5pts] Sea $A = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/4 & -1/2 \\ 1 & -1/2 & 1 \\ -1 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$. Se sabe que los valores propios de A son 0,1,-1. Calcule A^{15}.

$A^{15} =$

6. Suponga que $P = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 \\ a & 0.4 \end{bmatrix}$ es la matriz de transición de un proceso de Markov.

   (a) [5pts] Halle el valor de a:

   $a =$

   (b) [5pts] Con el valor de a obtenido en (a), halle el valor de un vector de probabilidad estacionario v^*.

   $v^* =$

II. Verdadero/Falso

7. Señale el valor de verdad de cada enunciado marcando la casilla correspondiente.

   (a) [2pts] Si $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ son vectores propios de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ de valor propio 0 entonces v_1, v_2 son linealmente dependientes. .... $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

   (b) [2pts] Si A es una matriz 4×4 entones su polinomio característico $p_A(x)$ es de grado menor que 4. .... $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

   (c) [2pts] Toda matrix $n \times n$ diagonalizable tiene al menos n valores propios distintos. .... $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

   (d) [2pts] Si A y B son matrices semejantes entonces $\det(A) = \det(B)$. .... $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

   (e) [2pts] La matriz de transición de un proceso de Markov es siempre simétrica. .... $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

   (f) [2pts] La matriz de adyacencia de un grafo es siempre simétrica. .... $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

   (g) [2pts] Una matriz $n \times n$ es ortogonal si y solo si sus columnas forman una base ortogonal de $\mathbb{R}^n$. .... $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

   (h) [2pts] Toda base ortogonal es ortonormal. .... $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

   (i) [2pts] Si Q es una matriz ortogonal entonces el ángulo entre v y w es el mismo que el ángulo entre Qv y Qw. .... $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

   (j) [2pts] Toda matriz real simétrica es diagonalizable. .... $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

III. Solución con Procedimiento

8. Sea $A = [1 \quad -2 \quad 1]$ y $W = \text{nul}(A) \subseteq \mathbb{R}^3$.

   (a) [10pts] Calcule una base ortogonal de W.

   (b) [10pts] Sea $v = \begin{bmatrix} 6 \\ -7 \\ 10 \end{bmatrix}$. Calcule $\text{proy}_W(v)$.

9. Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Se sabe que sus valores propios son 0 y 3.

   (a) [12pts] Encuentre una base ortogonal de vectores propios de A.

   (b) [8pts] Descomponga $A = QDQ^T$ donde Q es una matriz ortogonal y D es una matriz diagonal.