Tercer Examen Parcial de Álgebra Lineal - A
23 de Agosto de 2019

Puntaje. Sólo para uso Oficial

I. 1-9 (56)	II. 1 (24)	II. 2 (20)	**TOTAL** (100)	**NOTA** (5.0)

Instrucciones: La duración del examen es de 1 hora y 50 minutos. El examen consta de 8 y 2 preguntas en dos partes y tres hojas impresas por ambos lados. Verifique que su examen esté completo y consérvelo con el gancho. En las preguntas con procedimiento justifique sus respuestas en los espacios asignados. No está permitido sacar hojas en blanco ni ningún tipo de apuntes durante el examen. Verifique que su celular esté apagado. No se permite el uso de calculadora.

IDENTIFICACIÓN

Nombre: ______________________________ Cédula ______________

Profesor: ______________________________ Grupo ______________

Espacio para completar respuestas o borrador. Marque claramente si hay respuestas en este espacio.
No voltee esta hoja hasta ser AUTORIZADO por el encargado de salón.

I. Completación

En las preguntas 1 a 8 complete los espacios en blanco.

NOTA: *En esta sección se califica sólo la respuesta y no se tiene en cuenta el procedimiento.* ***Revise su respuesta.***

1. Sea $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

   (a) [4pts] Determine los valores propios de A.

   $\{\text{valores propios de } A\} = \left\{ \qquad\qquad \right\}$

   (b) [4pts] Determine los valores propios de A^{-1}:

   $\{\text{valores propios de } A^{-1}\} = \left\{ \qquad\qquad \right\}$

2. [4pts] Sea A una matriz de orden 3×3 con valores propios $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$. La multiplicidad algebraica de $\lambda_1 = 1$ es 2 y el espacio propio asociado al valor propio $\lambda_1 = 1$ es $E_1 = \text{gen}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix} \right)$.

   ¿Es A diagonalizable ? Señale la respuesta correcta con una x.

   $\boxed{SI}$ $\qquad$ $\boxed{NO}$

3. [4pts] Sea $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ con $a \in \mathbb{R}$. Determine el valor de a para que $\mathcal{B}$ sea un conjunto ortogonal.

   $a =$

4. Sea A una matriz de orden 4×4 con valores propios $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$ y $\lambda_3 = 2$. Los espacios propios asociados a estos valores propios son $E_1 = \text{gen}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$, $E_{-1} = \text{gen}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ y $E_2 = \text{gen}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

   (a) [4pts = 2pts + 2pts] ¿Cuáles son las multiplicidades algebraica y geométrica de $\lambda_1 = 1$?

   m.a.(1) =   m.g.(1) =

   (b) [6pts = 3pts + 3pts] Halle matrices P invertible y D diagonal tales que $P^{-1}AP = D$.

   $P =$, $D =$

5. [4pts] Sea $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x - z = 0 \right\}$. Determine una base $\mathcal{B}$ del complemento ortogonal $W^\perp$.

   $\mathcal{B} =$

6. [6pts = 3pts + 3pts] Sea $W = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$. Determine la descomposición ortogonal de $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ con respecto a W, es decir determine $w \in W$ y $w^\perp \in W^\perp$ tales que $v = w + w^\perp$.

$w =$, $w^{\perp} =$

7. [10pts = 5×2pts] Sea A una matriz de orden $n \times n$. Señale con una x el valor de verdad de cada enunciado.
   (a) [2pts] Una matriz A con valor propio $\lambda = 0$ es invertible. $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
   (b) [2pts] $(\text{nul}(A^T))^{\perp} = \text{ren}(A)$. $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
   (c) [2pts] Si la multiplicidad algebraica de cada valor propio de A es igual a su multiplicidad geométrica, entonces A es diagonalizable. $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
   (d) [2pts] $\text{nul}(A^T) = \text{ren}(A^T)^{\perp}$. $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
   (e) [2pts] Si A es invertible y λ es valor propio de A, entonces $-\lambda$ es valor propio de A^{-1}. $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

8. [10pts = 5×2pts] Considere la siguiente secuencia de instrucciones en Matlab:

```
>> u = [1; 1; 1; 1]; v = [1; 1; 1; 0]; w = [1; 1; 0; 0]; x = [[1 0]'; [1 -1]'];
>> A = [u v w ones(4)];
>> B = rref(A);
>> C = B(:,1:4);
>> Z = size(null([ones(3) zeros(3)]));
>> k = Z(2);
```

Escriba, usando nuestra notación matemática usual para matrices, los valores de `u, x, A, C, k` al final de la ejecución de esta secuencia de instrucciones.

`u`= `x`=

`A`= `C`= `k`=

Sugerencia: Para `C` no necesita realizar la computación de `rref` completamente.

II. Solución con Procedimiento

1. [24pts] Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ una transformación lineal definida por

$$T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_3 \\ x_2 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \end{bmatrix}.$$

   (a) [8pts] Determine si T es inyectiva. Justifique su respuesta.

   (b) [8pts] Determine una base del núcleo de T.

   (c) [8pts] Determine si T es sobreyectiva. Justifique su respuesta.

2. [20pts] Sean $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ bases de un espacio vectorial V tales que

$$a_1 = b_1 + b_2 - b_3 \ , \ \ a_2 = b_1 - b_2 + b_3 \ , \ \ a_3 = b_1 + b_2 + b_3 \ .$$

Determine la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{B}}$, es decir, la matriz tal que

$$[x]_{\mathcal{A}} = P_{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{B}}[x]_B.$$

donde $[x]_{\mathcal{A}}$, $[x]_{\mathcal{B}}$ son los vectores coordenados de un vector x en V con respecto a las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, respectivamente.