Primer Examen Parcial de Álgebra Lineal
11 de septiembre de 2023

Puntaje. Sólo para uso Oficial

1-3	4-5	6-7	8	9	**TOTAL**	**NOTA**

Instrucciones: La duración del examen es de 1 hora y 50 minutos. El examen consta de nueve preguntas en tres hojas impresas por ambos lados, verifique que su examen esté completo. No está permitido sacar hojas en blanco ni ningún tipo de apuntes durante el examen, verifique que su celular esté apagado. No se permite el uso de calculadora.

IDENTIFICACIÓN

Nombre: ______________________________ Cédula ______________

Profesor: ______________________________ Grupo ______________

Espacio en blanco para realizar cómputos

1. [8*pt*] Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ y $u = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Se sabe que u es una solución al sistema homogéneo asociado a A, es decir u es solución al sistema $A\vec{x} = 0$. Consideremos el vector $v = Au + 3u$. Marque con una $\mathbb{X}$ la casilla que contenga el valor correcto de $u \cdot v$, es decir, el producto punto entre los vectores u y v.

(a) $u \cdot v = 1$	(b) $u \cdot v = 0$	(c) $u \cdot v = 6$	(d) $u \cdot v = 18$	(e) Ninguna de las anteriores.

2. [8*pt*] Sea $B = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. Se sabe que el sistema homogéneo asociado a B, es decir el sistema $B\vec{x} = 0$, tiene infinitas soluciones. Marque con una $\mathbb{X}$ las casillas siguientes que contengan las matrices que pueden ser la forma escalonada reducida por renglones de B.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	(b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	(d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	(e) Ninguna de las anteriores.

3. [16*pt*] Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas (Marque V o F según el caso).

   (a) [2*pt*] Todo sistema de ecuaciones lineales homogéneo con más ecuaciones que variables es consistente.

   $\boxed{V}\ \boxed{F}$

   (b) [2*pt*] Si u, v y w son vectores en $\mathbb{R}^3$ tales que u es ortogonal a v y v es ortogonal a w, entonces v es ortogonal a $u + w$.

   $\boxed{V}\ \boxed{F}$

   (c) [2*pt*] Si A y B son dos matrices cuadradas, de las mismas dimensiones, que son simétricas y tales que $AB = 0$, entonces $BA = AB$.

   $\boxed{V}\ \boxed{F}$

   (d) [2*pt*] Si C es una matriz de tamaño 3×3 tal que $\det(2C) = 4\det(C)$, entonces $\text{Rango}(C) = 3$.

   $\boxed{V}\ \boxed{F}$

4. [10pt] Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ -3 & -2 & -6 \end{bmatrix}$. Sean $b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Calculando se puede ver que el sistema$[A|b_1]$ es consistente mientras el sistema $[A|b_2]$ es inconsistente. Marque con una $\mathbb{X}$ cuáles de los siguientes vectores pertenece al generado de las columnas de A.

(a) $b_1 + b_2$	(b) $3b_2$	(c) $3b_1$	(d) $3b_1 + 3b_2$	(e) Todas las anterioes.

5. [10pt] Sean $a = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $c = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ y sea A la matrix de 3×3 cuyas columnas están dadas por a, b y c. Se sabe que c pertenece a gen$\{a, b\}$. Marque con una $\mathbb{X}$ cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas.

(a) a, b y c son L.I.	(b) a, b y c son L.D.
(c) La forma escalonada reducida de A es la identidad.	(d) A tiene rango 3.

6. [8*pt*] Supongamos que $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Se sabe que u y v son ortogonales. Marque con una $\mathbb{X}$ el valor correcto de la $\text{proy}_v(u + 3v)$, es decir de la proyección de $u + 3v$ sobre v.

(a) $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$	(b) $\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}$	(c) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$
(d) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$	(e) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	(f) Ninguna de las anteriores.

7. [10*pt*] Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1/3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$. Se sabe que $\det(A) = 36$. Marque con una $\mathbb{X}$ el valor correcto de $\det(-2A^T B^2)$.

(a) 4	(b) -36	(c) -2	(d) 1	(e) Ninguna de las anteriores.

8. [15*pt*] Escriba tres soluciones al sistema lineal dado a continuación. Si tales soluciones no existen explique claramente por qué. Escriba claramente sus argumentos.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & y & + & z & + & w = & 3 \\ -x & + & y & - & z & + & w = & 5 \\ 3x & + & 3y & + & 3z & + & 3w = & 9 \end{array}\right.$$

9. [15pt] Sea $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(a) [5pt] Dibuje un grafo no dirigido G, con vértices $\{1, 2, 3, 4\}$, cuya matriz de adyacencia es A.

(b) [10pt] Encuentre el número de 3-trayectorias del grafo G entre los vertices 1 y 2.