Segundo Examen Parcial de Álgebra Lineal
20 de Abril del 2015

Puntaje. Sólo para uso Oficial

1 – 6	7	8	9	10	TOTAL	NOTA

Instrucciones: La duración del examen es de 1 hora y 50 minutos. El examen consta de diez preguntas en dos hojas impresas por ambos lados, verifique que su examen esté completo y consérvelo con el gancho. En las preguntas con procedimiento justifique sus respuestas en los espacios asignados. No está permitido sacar hojas en blanco ni ningún tipo de apuntes durante el examen, verifique que su celular esté apagado. No se permite el uso de calculadora.

IDENTIFICACIÓN

Nombre: ______________________________ Cédula ______________

Profesor: ______________________________ Grupo ______________

I. Completación

En las preguntas 1 a 6 complete los espacios en blanco. **NOTA**: En esta sección se califica sólo la respuesta y no se tiene en cuenta el procedimiento.

1. [8*pt*] ¿Para qué valores de b la matriz cuadrada $A = \begin{bmatrix} b & 2 \\ 8 & b \end{bmatrix}$ es invertible? ______________

2. [8*pt*] Sean $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $S\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ transformaciones lineales. Escriba (V) verdadero o (F) falso según el caso.

   ( ) $T \circ S$ es una transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^k$.

   ( ) $S \circ T$ es una transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^k$.

   ( ) Si T es inyectiva y S es sobreyectiva entonces $S \circ T$ es también inyectiva.

   ( ) Si T y S son ambas inyectivas entonces $S \circ T$ es también inyectiva.

3. [6*pt*] Considere A y B matrices conocidas invertibles $n \times n$ y X es una matriz $n \times n$ desconocida. Entonces,

   (i) Si $AXB = AB^2$ entonces $X =$ ______________

   (ii) Si $XA - A = BA$ entonces $X =$ ______________

4. [8*pt*] Sea $\mathcal{E}$ un espacio vectorial de dimensión 7, y $\mathcal{S}$ un subespacio de $\mathcal{E}$ que no es todo $\mathcal{E}$. Escriba (V) verdadero o (F) falso según el caso.

   ( ) $\mathcal{S}$ tiene dimensión a lo más 6.

   ( ) Todo conjunto generador de $\mathcal{S}$ puede extenderse hasta formar una base de $\mathcal{E}$.

   ( ) Toda base de $\mathcal{E}$ contiene una base de $\mathcal{S}$.

   ( ) Todo conjunto generador de $\mathcal{E}$ contiene un conjunto generador de $\mathcal{S}$.

5. [8*pt*] Sea A una matriz $n \times m$ donde $n < m$. Escriba (V) verdadero o (F) falso según el caso.

   ( ) El rango de A es siempre estrictamente menor que la dimensión del espacio generado por las columnas de A.

   ( ) El rango de A es un número entero entre n y m.

   ( ) La nulidad (dimensión del espacio nulo) de A es menor o igual a m.

   ( ) La nulidad de A^T y el rango de A suman n.

6. [12*pt*] Conteste:

   (a) Sea $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal cuya expresión en coordenadas es $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - ay \\ x + y \\ 2x + 2y \end{bmatrix}$ ¿Para qué valores de a la transformación T es inyectiva?____________________________

   (b) Sea $S\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $S\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $S\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. ¿La matriz estándar de S es? __________

II. Solución con Procedimiento

7. [10*pt*] Demuestre que si A es una matriz simétrica e invertible, entonces su inversa también es simétrica.

8. [20*pt*] Considere la matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dé una base para:

(i) El espacio generado por los renglones de A.

(ii) El espacio nulo de A.

(iii) El espacio generado por las columnas de A.

9. [10*pt*] Sea $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ tal que, $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax - y \\ x + by \\ x + y \\ x - cy \end{bmatrix}$, Donde a, b, c son números reales desconocidos.

   Suponga además, $T\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$. Calcule los valores de a,b y c.

10. [10*pt*] Sea W el subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3$ generado por los polinomios $1+x$, $x+x^2$, x^2+x^3, x^3, es decir, $W = \text{gen}\{1+x, x+x^2, x^2+x^3, x^3\}$. Determine si el polinomio $2+x+x^2+x^3$ pertenece a W, y en tal caso escríbalo como combinación lineal de los generadores.