Segundo Examen Parcial de Álgebra Lineal
17 de Abril del 2017

Puntaje. Sólo para uso Oficial

1-15 (/60)	16 (/15)	17 (/10)	18 (/15)	**Total**	**Nota**

Nombre: ______________________

Cédula: ______________ Grupo: __

Número Asignado: 775

Firma: ______________________

(Entiendo que cometer fraude es una falta disciplinaria grave)

Instrucciones: Antes de empezar verifique que su examen esté **completo** y que sus **datos** sean **correctos**. Por favor verifique que su celular esté **apagado**. No está permitido el uso de calculadora ni de otros aparatos electrónicos. Solucione las preguntas en los espacios en blanco asignados a cada una de ellas. No está permitido sacar hojas en blanco ni ningún tipo de apuntes durante el examen. **Duración: 1 hora y 50 minutos**.

I. Falso o verdadero

En los siguientes ejercicios escriba (V) si el enunciado es verdadero o (F) si es falso. **NOTA**: En esta sección se califica sólo la respuesta y no se tiene en cuenta el procedimiento.

1. (3pt) ( ) El conjunto $V = \left\{ \begin{bmatrix} |a| \\ 0 \\ a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ es subespacio de $\mathbb{R}^3$.
2. (3pt) ( ) El conjunto $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0 \right\}$ es subespacio de $\mathbb{R}^2$.
3. (3pt) ( ) El conjunto $M = \left\{ b + bx + cx^2 \mid b, c \in \mathbb{R} \text{ y } b + c = 0 \right\}$ es subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}$.
4. (3pt) ( ) El conjunto $\{v_1 = \cos(x), v_2 = \operatorname{sen}(x), v_3 = 1\}$ es un conjunto linealmente independiente en el espacio de las funciones $\mathcal{F}$.
5. (3pt) ( ) Si $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ es una transformación lineal entonces T no puede ser inyectiva.
6. (3pt) ( ) La aplicación $L : M_{2\times 2} \to \mathbb{R}^2$ dada por $L \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ab \\ c - d \end{bmatrix}$ es una transformación lineal.
7. (3pt) ( ) El conjunto $\{u_1 = 1 + x^2,\ u_2 = 1 - x,\ u_3 = 2 + x^2\}$ es una base de $\mathcal{P}_2$, el espacio de los polinomios de grado menor o igual a 2.
8. (3pt) ( ) Si $T : V \to W$ es una transformación lineal entonces $\text{kernel}(T) = \{0\}$.
9. (3pt) ( ) Si $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^5$ es una transformación lineal entonces $\text{rango}(T) + \text{nulidad}(T) = 7$
10. (3pt) ( ) Si W es subespacio de V y β es una base de W entonces β es un conjunto linealmente independiente de V.

II. Selección multiple

Para los siguientes ejercicios sean $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ y $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ las transformaciones lineales definidas por

$$T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad S \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y \\ 2x \\ x + y \end{bmatrix}$$

Señale la opción correcta marcando con una X sobre la letra correspondiente.

11. (6pt) La matriz de S es:

a. $[S] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ b. $[S] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ c. $[S] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ d. $[S] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

e. Ninguna de las anteriores

12. (6pt) Si tomamos $L = S \circ T$, entonces:

a. $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ está dada por $L \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ -x - y \end{bmatrix}$

b. $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ está dada por $L \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 + x_3 \\ 2x_1 - 2x_2 \\ -x_2 - x_3 \end{bmatrix}$

c. $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ está dada por $L \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \end{bmatrix}$

d. $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ está dada por $L \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x - y \\ -2y \end{bmatrix}$

e. Ninguna de las anteriores.

13. (6pt) La matriz M de la transformación $K = T \circ S$ es

a. $M = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ b. $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ c. $M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

e. Ninguna de las anteriores.

14. (6pt) ¿Cuál de los siguientes vectores está en el núcleo (kernel) de T?

a. $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e. Ninguno de los anteriores.

15. (6pt) ¿Cuál de los siguientes vectores está en la imagen de S?

a. . $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e. Ninguno de los anteriores.

III. Solución con Procedimiento

16. (15pt) Sean V, W y K espacios vectoriales y $T : V \to W$ y $L : W \to K$ transformaciones lineales,
    a. (10pt) Pruebe que $L \circ T : V \to K$ es una transformación lineal.
    b. (5pt) Pruebe que si T y L son transformaciones lineales inyectivas entonces $L \circ T$ es inyectiva.

17. (10pt) Dado el conjunto $\beta = \left\{ v_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ del espacio de matrices $M_{2\times 2}$.
    a. (5pt) Pruebe que β es un conjunto linealmente independiente.
    b. (2pt)¿Es β una base del espacio $M_{2\times 2}$?
    c. (3pt) Diga para qué valores de d está $v_4 = \begin{bmatrix} d & 1 \\ -2 & -2d \end{bmatrix}$ en el subespacio generado por β.

18. (15pt) Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

    Encuentre

    a. (3pt) Rango de A.

    b. (5pt) Una base para el espacio $Nulo\,(A)$, espacio nulo de A.

    c. (5pt) Base del espacio $Col\left(AA^T\right)$, espacio columna de AA^T.

    d. (2 puntos)¿Está el vector $v = [1, 1, 0, 2]$ en el espacio fila de A?