Segundo Examen Parcial de Álgebra Lineal
5 de Mayo de 2018

Puntaje. Sólo para uso Oficial

1 – 4	5	6	7	8	**TOTAL**	**NOTA**

Instrucciones: La duración del examen es de 1 hora y 50 minutos. El examen consta de ocho preguntas en tres hojas impresas por ambos lados, verifique que su examen esté completo. En las preguntas con procedimiento justifique sus respuestas en los espacios asignados. No está permitido sacar hojas en blanco ni ningún tipo de apuntes durante el examen, verifique que su celular esté apagado. No se permite el uso de calculadora.

IDENTIFICACIÓN

Nombre: ______________________________ Cédula ______________

Profesor: ______________________________ Grupo ______________

Espacio en blanco para realizar cómputos

I. Completación

En la pregunta 1 marque V o F, y en las preguntas 2 a 4 complete los espacios en blanco. **NOTA**: En esta sección se califica sólo la respuesta y no se tiene en cuenta el procedimiento. No hay crédito parcial por respuestas incorrectas.

1. [20*pt*] Señale el valor de verdad de cada enunciado.

   (a) [4*pt*] $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; y \cdot z = 0 \right\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$. $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

   (b) [4*pt*] $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathrm{Col}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \right)$. $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

   (c) [4*pt*] $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \in \mathrm{Ren}\left(\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$. $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

   (d) [4*pt*] El conjunto de polinomios $\{x, 1+x, 2-x^2, 1+x^2, x-2x^3\}$ es L.I. en $\mathcal{P}_3$. $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

   (e) [4*pt*] $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$, definido por $T(p(x)) = p(x-100)$, es una transformación lineal. $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

2. [10*pt*] Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   (a) [5*pt*] Calcular $\dim(\mathrm{Nul}(A))$.

   $\boxed{\dim(\mathrm{Nul}(A)) = \qquad}$

   (b) [5*pt*] Calcular $\dim(\mathrm{Col}(A))$.

   $\boxed{\dim(\mathrm{Col}(A)) = \qquad}$

3. [5*pt*] Calcular la dimensión del espacio vectorial

$$V = \left\{ p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathcal{P}_3 \mid p'(0) = p'''(0) \right\}.$$

   $\boxed{\dim(V) = \qquad}$

4. [5*pt*] Sean $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ y $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ las transformaciones lineales dadas por

$$S \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ y+z \end{bmatrix}; \;\; T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+y \\ y \end{bmatrix}.$$

Calcular $(T \circ S) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$$\boxed{(T \circ S) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \qquad\qquad\qquad}$$

II. Solución con Procedimiento

En esta sección debe incluir los detalles del procedimiento para llegar a la respuesta deseada, incluyendo todas las partes que se requieran explícitamente.

5. [10*pt*] Sea $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal tal que $P(v)$ es la proyección de v en la dirección del vector $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Encontrar la matriz estándar de la transformación P.

6. [10pt] Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la única transformación lineal tal que

$$T \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad T \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Encontrar $T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

7. [20*pt*] Sea

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2} \;\middle|\; a+b=c+d \right\}.$$

(a) [10*pt*] Pruebe que V es un subespacio vectorial de $M_{2\times 2}$.

(b) [10*pt*] Encontrar una base para V y determinar la dimensión de V.

8. [20*pt*] Sea $T : M_{2\times 2} \to \mathcal{P}_3$ la transformación lineal definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + (b+c)x + (b-c)x^2 + (a+d)x^3.$$

(a) [10*pt*] Determine si T es inyectiva.

(b) [10*pt*] Determine si T es sobreyectiva.