Segundo Examen Parcial de Álgebra Lineal
25 de Octubre del 2014

Puntaje. Sólo para uso Oficial

1-5 (/50)	6 (/25)	7 (/25)	**Total**	**Nota**

Nombre: ____________________

Cédula ____________________ Grupo ____________

Profesor: ____________________

Instrucciones: La duración del examen es de 1 hora y 40 minutos. El examen consta de ocho preguntas en tres hojas impresas por ambos lados, antes de empezar verifique que su examen esté completo. No **desengrape** su exámen ni **añada** otras grapas o su exámen será **anulado**. En las preguntas con procedimiento **justifique** sus respuestas en los **espacios asignados**. No está permitido el uso de calculadoras, sacar hojas en blanco ni ningún tipo de apuntes durante el examen. Tampoco se permiten preguntas. Por favor verifique que su celular esté **apagado**.

I. Opción Múltiple y Completación

En las preguntas 1 a 5 complete los espacios en blanco o elija la opción correcta según el caso. Marque con una X la letra de su elección. **NOTA**: En esta sección se califica sólo la respuesta y no se tiene en cuenta el procedimiento.

1. [12*pts*] Sea $M_{n\times n}$ el espacio de las matrices de $n \times n$, con $n \geq 2$ (recuerde que las matrices $\{E_{ij} : 1 \leq i, j \leq n\}$ son la base canónica de $M_{n\times n}$). Complete los siguientes literales:

   (a) Si $A = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_{n-1}, \vec{a}_n]$ entonces $A\hat{e}_2 =$ ____________________

   (b) Sea $tr : M_{n\times n} \to \mathbb{R}$ tal que $tr(A)$ es la traza de la matriz A, luego $tr(-E_{11} + E_{22}) =$ __________

   (c) El subespacio $V = \{A \in M_{n\times n} : A_{11} = A_{22}\}$ tiene dimensión: ____________________

   (d) El subconjunto de matrices invertibles no es un subespacio pues: ____________________

   (e) La dimensión del subespacio de las matrices antisimétricas es: ____________________

   (f) Sea $T : M_{n\times n} \to \mathbb{R}$ luego TE_{11}, TE_{22} son L.D. pues: ____________________

Espacio libre para borrador. Nada escrito acá será incluido en la calificación.

2. [12*pt*] Sean $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ vectores no nulos de $\mathbb{R}^3$ y $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal. Indique con una X si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.

   (a) Si $T\vec{v}_1, T\vec{v}_2, T\vec{v}_3$ no están en un mismo plano entonces $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ son L.I. (V) (F).

   (b) Si $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ son vectores L.I. entonces $\dim(\text{gen}\{T\vec{v}_1, T\vec{v}_2, T\vec{v}_3\}) \geq 2$ (V) (F).

   (c) Si $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_3$ son vectores L.D. entonces $\text{gen}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) \subseteq \text{gen}(\vec{v}_2, \vec{v}_3)$. (V) (F).

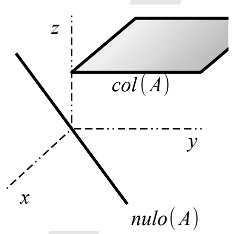
   (d) Si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ son L.I. entonces $\{T\vec{v}_1, T\vec{v}_2, T\vec{v}_3\}$ es base de $\mathbb{R}^3$. (V) (F).

   (e) Si $T\vec{v}_1, T\vec{v}_2, T\vec{v}_3$ están en un mismo plano entonces $\dim(\text{gen}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)) = 2$ (V) (F).

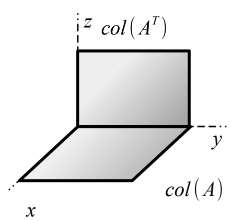
   (f) Si $T\vec{v}_1, T\vec{v}_2$ son vectores L.I. entonces $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ es base de $\text{gen}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ (V) (F).

Espacio libre para borrador. Nada escrito acá será incluido en la calificación.

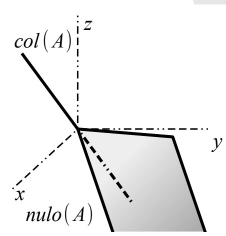
3. [6*pt*] Sea A una matriz de 3×3 (recuerde que $\ker(A) = nulo(A)$). En las siguientes gráficas las regiones sombreadas representan porciones de planos en el espacio. Marque con una **X** cuál o cuales de dichas representaciones gráficas podrían darse. **Nota.** En esta pregunta, una opción marcada incorrectamente anula una opción marcada correctamente.



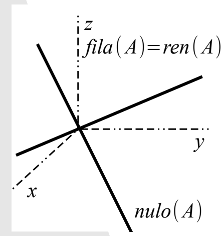
(a)



(b)



(c)



(d)

Espacio libre para borrador. Nada escrito acá será incluido en la calificación.

4. [8*pts*] Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, provea bases para los siguientes subespacios. **Nota.** Recuerde la base $\mathcal{B}$ del subespacio $\{\vec{0}\}$ es el conjunto vacío, es decir $\mathcal{B} = \emptyset$.

(a) [2*pts*] $col(A)$

$\mathcal{B} =$ ________________

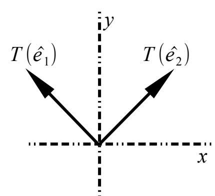
(b) [2*pts*] $nulo(A^T) = ker(A^T)$

$\mathcal{B} =$ ________________

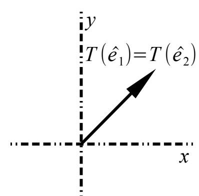
(c) [4*pts*] $col(AA^T)$

$\mathcal{B} =$ ________________

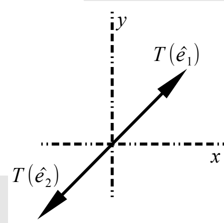
5. [12*pt*] Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Dado el vector unitario $\widehat{\boldsymbol{e}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ en $\mathbb{R}^2$, denotamos $E_{\widehat{\boldsymbol{e}}}$ la reflexión a través de el eje gen$(\widehat{\boldsymbol{e}})$ y $P_{\widehat{\boldsymbol{e}}}$ la proyección sobre el subespacio gen$(\widehat{\boldsymbol{e}})$. Denotamos R_θ la rotación de vectores por un ángulo θ, en sentido antihorario. Marque con una **X**, si las transformaciones lineales están bien esquematizadas (V) o si no lo están (F). **Indicación.** Dibujar cada etapa de la composición puede ayudarle.



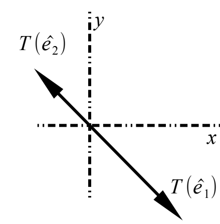
(a) $T = R_\theta \circ E_{\widehat{\boldsymbol{e}}}$
(V) (F)



(b) $T = P_{\widehat{\boldsymbol{e}}} \circ E_{\widehat{\boldsymbol{e}}}$
(V) (F)



(c) $T = R_\theta \circ P_{\widehat{\boldsymbol{e}}}$
(V) (F)



(d) $T = P_{\widehat{\boldsymbol{e}}} \circ A$
(V) (F)

Espacio libre para borrador. Nada escrito acá será incluido en la calificación.

II. Solución con Procedimiento

6. [25*pt*] Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal definida en la base canónica por $T(\widehat{\boldsymbol{e}}_1) = 4\widehat{\boldsymbol{e}}_2$, $T(\widehat{\boldsymbol{e}}_2) = \widehat{\boldsymbol{e}}_3$, $T(\widehat{\boldsymbol{e}}_3) = 2\widehat{\boldsymbol{e}}_4$ y $T(\widehat{\boldsymbol{e}}_4) = 3\widehat{\boldsymbol{e}}_1$.

   (a) [10*pt*] Encuentre la matriz A de la transformación lineal T.

   (b) [15*pt*] Encuentre la inversa de A. **Sugerencia.** Ataque el problema utilizando conceptos, no algoritmos.

7. [25*pt*] Sea $M_{n\times k}$ el espacio de las matrices de $n \times k$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, y sean los conjuntos $V = \{A^T\vec{v} : A \in M_{n\times k}\}$, $W = \{A \in M_{n\times k} : \vec{v}^T A = 0\}$.

   (a) [8*pt*] ¿Es W un subespacio?

   (b) [7*pt*] ¿Puede darse que $W = M_{n\times k}$?

(c) [10pt] Suponga que $\vec{v} = \widehat{\boldsymbol{e}}_n$, demuestre que $V = \mathbb{R}^k$.

Espacio libre para borrador. Nada escrito acá será incluido en la calificación.