Segundo Examen Parcial de Álgebra Lineal - A
11 de Marzo de 2019

Puntaje. Sólo para uso Oficial

I. 1-5 (30)	I. 6-8 (14)	II. 1 (18)	II. 2 (26)	II. 3 (12)	**TOTAL** (100)	**NOTA** (5.0)

Instrucciones: La duración del examen es de 1 hora y 50 minutos. El examen consta de 8 y 3 preguntas en dos partes y tres hojas impresas por ambos lados. Verifique que su examen esté completo y consérvelo con el gancho. En las preguntas con procedimiento justifique sus respuestas en los espacios asignados. No está permitido sacar hojas en blanco ni ningún tipo de apuntes durante el examen. Verifique que su celular esté apagado. No se permite el uso de calculadora.

IDENTIFICACIÓN

Nombre: ______________________________ Cédula ____________

Profesor: ______________________________ Grupo ____________

Espacio para completar respuestas o borrador. Marque claramente si hay respuestas en este espacio.
No voltee esta hoja hasta ser AUTORIZADO por el encargado de salón.

I. Completación

En las preguntas 1 a 5 complete los espacios en blanco. **NOTA**: En esta sección se califica sólo la respuesta y no se tiene en cuenta el procedimiento. Revise su respuesta.

1. [6pts] Sean $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ y $w = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$. Escriba el vector de coordenadas $[w]_{\mathcal{B}}$.

   $[w]_{\mathcal{B}} =$

2. [6pts] ¿Para cuales valores del escalar α, la transformación lineal $T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x + \alpha y \\ -x + 2y \end{bmatrix}$ no es invertible ?

   $\alpha =$

3. [6pts] La matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ tiene forma escalonada reducida $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   (a) [2pts] Determine una base $\mathcal{B}_1$ para Col(A).

   $\mathcal{B}_1 =$

   (b) [4pts] Determine una base $\mathcal{B}_2$ para Nul(A).

   $\mathcal{B}_2 =$

4. [6pts] Dadas las transformaciones lineales $R\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{bmatrix}$ y $S\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 - 3y_2 \\ -y_1 + y_2 \end{bmatrix}$, encuentre la matriz estándar de la composición $[S \circ R]$.

$[S \circ R] =$

5. [6pts] Sean n y k enteros con $n > 0$ y $0 \leq k < n$. Si A es una matriz de orden $p \times q$ con $\text{Rango}(A) = \min(p, q)$, y $\text{Nul}(A)$ es subespacio de $\mathbb{R}^n$ con $\dim(\text{Nul}(A)) = k$, entonces se debe tener que (exprese p, q en términos de n, k):

$p =$ $\qquad\qquad$ $q =$

6. [4pts] Sea V un espacio vectorial de dimensión n. Señale el valor de verdad de cada enunciado.

   (a) [2pts] Cada subconjunto de n vectores linealmente independientes de V forma una base de V. $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

   (b) [2pts] Cada subconjunto de n vectores de V, de los cuales cada subconjunto de $n-1$ vectores es linealmente independiente, forma una base de V. $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

7. [4pts] Sea H un subespacio de $\mathbb{R}^n$ determinado por un sistema lineal homogeneo de m ecuaciones en n incógnitas con la matriz de coeficientes A. Señale el valor de verdad de cada enunciado.

   (a) [2pts] Si $m < n$ entonces $\dim(H) < m$. $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

   (b) [2pts] Si $m = n$ y $\text{Rango}(A) < n$ entonces una base de H consiste de al menos un vector. $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

8. [6pts] Señale el valor de verdad de cada enunciado.

   (a) [2pts] Si $F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ es transformación lineal con $\text{Nulidad}(F) = 2$, entonces F es necesariamente sobreyectiva. $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

   (b) [2pts] Si $R : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ es una transformación lineal sobreyectiva, entonces R es inyectiva. $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

   (c) [2pts] Si A, B, C, D son matrices simétricas en $M_{2\times 2}$, entonces A, B, C, D son necesariamente L.D. $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

II. Solución con Procedimiento

1. [18pts] Sea $V = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \in \mathcal{P}_3 \,|\, a_1 + a_3 = a_0 + a_2\}$.

   (a) [10pts] Justifique que V es un espacio vectorial.

   (b) [8pts] Determine una base para V.

2. [26pts] Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación lineal con $T\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $T\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$

   (a) [10pts] Determine $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ y escriba la transformación en forma matricial, es decir $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ con $A \in M_{2\times 2}$.

   (b) [8pts] Determine $\mathrm{Nul}(T)$ y su dimensión.

   (c) [8pts] Determine $\mathrm{Im}(T)$ y su dimensión.

3. [12pts] Sea $S_{2\times 2}$ el subespacio de matrices simétricas en $M_{2\times 2}$ y sea $T : \mathcal{P}_2 \to S_{2\times 2}$ la transformación lineal definida por

$$T(ax^2 + bx + c) = \begin{bmatrix} a - c & b \\ b & b + c \end{bmatrix}.$$

Determine si T es un isomorfismo.