Primer Examen Parcial de Álgebra Lineal
21 de octubre de 2023

Puntaje. Sólo para uso Oficial

1-3	4-6	7-8	9-10	**TOTAL**	**NOTA**

Instrucciones: La duración del examen es de 1 hora y 50 minutos. El examen consta de diez preguntas en tres hojas impresas por ambos lados, verifique que su examen esté completo. No está permitido sacar hojas en blanco ni ningún tipo de apuntes durante el examen, verifique que su celular esté apagado. No se permite el uso de calculadora.

IDENTIFICACIÓN

Nombre: ______________________________ Cédula ______________

Profesor: ______________________________ Grupo ______________

Espacio en blanco para realizar cómputos

1. [10*pt*] Sea A una matriz invertible de tamaño 3×3. Si sabe que $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -6 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ entonces la inversa de $B = \frac{1}{10}A^T$ es:

(a) $\begin{bmatrix} 20 & -20 & 10 \\ 10 & 10 & -10 \\ 30 & -60 & 40 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.3 \\ -0.2 & 0.1 & -0.6 \\ 0.1 & -0.1 & 0.4 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} -0.2 & -0.7 & -0.9 \\ 0.2 & 0.5 & 0.6 \\ 0.1 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} -20 & -70 & -90 \\ 20 & 50 & 60 \\ 10 & 30 & 40 \end{bmatrix}$

2. [10*pt*] Señale todos los subconjuntos que sean subespacios de $\mathbb{R}^4$.

(a) $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

(b) $\{v \in \mathbb{R}^4 : \ 1 < ||v|| < 3\}$

(c) $\text{gen}(e_1, e_3)$

(d) $\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ : \ x + y + z - w = 1 \right\}$

3. [10*pt*] Sea $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, y se sabe que su forma escalonada reducida es $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
Entonces una base para $\text{Col}(A)$, el espacio columna de A, es:

(a) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

(b) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

(c) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

(d) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

4. [10*pt*] Sea B una matriz de tamaño $m \times n$. Se sabe que $\dim(\text{Ren}(B)) = 150$ y que la nulidad de B es 250. Marque todas las afirmaciones que son verdaderas:

(a) El tamaño de B es 150×250.

(b) El tamaño de B es 250×150.

(c) La matriz B tiene 400 columnas

(d) La matriz B tiene 100 columnas

5. [10*pt*] Considere la base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ de $\mathbb{R}^3$. Se sabe que las coordenadas del vector $w \in \mathbb{R}^3$ en la base $\mathcal{B}$ están dadas por $[w]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$. Entonces w es igual a:

(a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 2 \\ 15 \\ 17 \end{bmatrix}$

6. [10*pt*] Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función de la cual se sabe que

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}, T\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Marque todas las afirmaciones que son verdaderas:

(a) T es una transformación lineal y su matriz estándar es $[T] = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

(b) T no es una transformación lineal.

(c) T es una transformación lineal y su matriz estándar es $[T] = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$.

(d) Ninguna de las anteriores.

7. [10*pt*] Sea $\mathcal{P}_n$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual a n. Considere los siguientes conjuntos:

$$V = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \ : \ a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \text{ y } a_1 \neq 0.\},$$
$$W = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \ : \ a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}.\},$$
$$Z = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ 5x^2 + 4y^2 = 0. \right\}$$

Marque todas las afirmaciones que son verdaderas:

(a) Z no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

(b) V es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_2$.

(c) Z es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

(d) W no es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_2$.

8. [10*pt*] Sea $\mathcal{P}_2$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual a 2. Considere las funciones $S : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ y $T : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_2$ dadas por

$$S(a_0 + a_1x + a_2x^2) = \begin{bmatrix} a_0 - a_1 \\ a_1 - a_2 \\ a_2 - a_0 \end{bmatrix} \text{ y } T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = c + bx + ax^2.$$

Marque todas las afirmaciones que son verdaderas:

(a) T es una transformación lineal invertible.

(b) S no es una transformación lineal.

(c) La compuesta $S \circ T$ no existe.

(d) Ninguna de las anteriores.

9. [10*pt*] Una matriz cuadrada A se llama *antisimétrica* si $A^T = -A$. Se sabe que el conjunto

$$S = \{A \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \ : \ A \text{ es antisimétrica } \}$$

es un subespacio de $\mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Su dimensión es igual a:

(a) 1	(b) 3	(c) 4	(d) 9

10. [10*pt*] Sea $\mathcal{P}_n$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual a n. Considere las transformaciones lineales $D : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_2$ y $I : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_3$ dadas por

$$D(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2, \quad I(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_3}{2}x^3.$$

Marque todas las afirmaciones que son verdaderas:

(a) D es una transformación lineal invertible.

(b) I es una transformación lineal invertible.

(c) $D \circ I$ es una transformación lineal invertible.

(d) $I \circ D$ es una transformación lineal invertible.