Segundo Examen Parcial de Álgebra Lineal
13 de Junio del 2015

Puntaje. Sólo para uso Oficial

1-4 (/48)	5 (/20)	6 (/12)	7 (/20)	**Total**	**Nota**

Nombre: **Matriz**

Cédula: CE Salón: Bl43 Grupo: TODOS

Examen Número: A-0

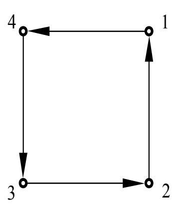
Firma: ____________________

Instrucciones: La duración del examen es de 1 hora y 50 minutos. El examen consta de siete preguntas en tres hojas impresas por ambos lados, antes de empezar verifique que su examen esté **completo** y que sus **datos** sean **correctos**. No **desengrape** su examen ni **añada** otras grapas o su examen será **anulado**. En las preguntas con procedimiento **justifique** sus respuestas en los **espacios asignados**. No está permitido hacer preguntas, el uso de calculadoras, sacar hojas en blanco ni ningún tipo de apuntes durante el examen. Por favor verifique que su celular esté **apagado**.

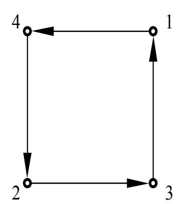
I. Opción Múltiple y Completación

En las preguntas 1 a 4 complete los espacios en blanco o elija la opción correcta según el caso. Marque con una X la letra de su elección. **NOTA**: En esta sección se califica sólo la respuesta y no se tiene en cuenta el procedimiento.

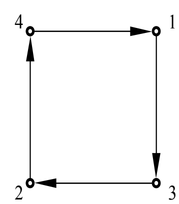
1. [12pt] Indique cuales de los siguientes grafos dirigidos tienen la matriz de adyacencia $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.



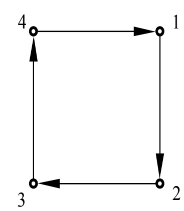
(a) (V) (F)



(b) (V) (F)



(c) (V) (F)



(d) (V) (F)

Espacio libre para borrador. Nada escrito acá será incluido en la calificación.

2. [12pt] Sean A, B matrices de $n \times n$ y $c \in \mathbb{R}$, responda a las siguientes preguntas

   (a) Si $\det(A) = 0$ entonces las columnas de A son linealmente dependientes.
   (V) (F).

   (b) $\det(A^T) = \det(A)$.
   (V) (F).

   (c) Si A es invertible entonces $\det(A) > 0$.
   (V) (F).

   (d) $\det(c\,A + B) = c\,\det(A) + \det(B)$.
   (V) (F).

3. [12pt] Sea $A = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^3$. Se definen los siguientes vectores

$$\vec{w}_1 = \vec{u}_1, \qquad \vec{w}_2 = \vec{u}_2 - \frac{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}\,\vec{u}_1, \qquad \vec{w}_3 = \vec{u}_3 - \frac{\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|^2}\,\vec{u}_2$$

   Responda si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

   (a) $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ es un conjunto ortogonal de $\mathbb{R}^3$.
   (V) (F).

   (b) $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ es una base ortonormal de $\text{gen}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$.
   (V) (F).

   (c) $\{\vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ es un conjunto ortogonal de $\text{gen}(\vec{u}_2, \vec{u}_3)$.
   (V) (F).

   (d) $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.
   (V) (F).

4. [12pts] Sea $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$, la matriz estocástica de una cadena de Markov. Suponga que $\widehat{\boldsymbol{e}}_2$ es un vector de probabilidad estacionario. Introduzca los valores numéricos solicitados a continuación, en caso de ser posible determinarlos y, en caso de no ser posible determinarlos, escriba la abreviación **DI** (datos insuficientes).

   (a) $p_{11} + p_{21} =$ ______ | (b) $p_{12} =$ ______ | (c) $p_{21} + p_{22} =$ ______ | (d) $p_{11} =$ ______

Espacio libre para borrador. Nada escrito acá será incluido en la calificación.

II. Solución con Procedimiento

5. Sean los vectores canónicos $\widehat{\boldsymbol{e}}_i \in \mathbb{R}^4$ con $1 \leq i \leq 4$ y defina la matriz $A = [\widehat{\boldsymbol{e}}_2, \vec{0}, \widehat{\boldsymbol{e}}_3, \widehat{\boldsymbol{e}}_4]$. Es decir, las columnas de A son los vectores $\widehat{\boldsymbol{e}}_2$, $\vec{0}$, $\widehat{\boldsymbol{e}}_3$ y $\widehat{\boldsymbol{e}}_4$.

   (i) [8*pt*] Encuentre los valores propios de A. Justifique su respuesta.

   (ii) [9*pt*] Encuentre $\dim(E_0)$. Justifique su respuesta.

(iii) [3pt] ¿Es A diagonalizable? Justifique su respuesta.

6. [12pt] Demuestre que si la matriz B de $n \times n$ es semejante a la matriz identidad I_n entonces $B = I_n$.

7. Se sabe que la matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ tiene solamente dos valores propios: -2 y 0.

   (i) [10pt] Demuestre que el vector $\vec{u} = [1, 0, -1, 0]^T$ está en el subespacio E_{-2}.

   (ii) [10pt] Suponga que $\vec{w} \in E_0$, demuestre que $\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{u}$.

Espacio libre para borrador. Nada escrito acá será incluido en la calificación.