Tercer Examen Parcial de Álgebra Lineal
21 de junio de 2023

Puntaje. Sólo para uso Oficial

1-2	3-4	5-6	7	8	**TOTAL**	**NOTA**

Instrucciones: La duración del examen es de 1 hora y 50 minutos. El examen consta de ocho preguntas en tres hojas impresas por ambos lados, verifique que su examen esté completo. En las preguntas con procedimiento justifique sus respuestas en los espacios asignados. No está permitido sacar hojas en blanco ni ningún tipo de apuntes durante el examen, verifique que su celular esté apagado, el uso del celular durante la realización del examen es causal de anulación. No se permite el uso de calculadora.

IDENTIFICACIÓN

Nombre: ________________________________ Cédula ________________

Profesor: ________________________________ Grupo ________________

Espacio en blanco para realizar cómputos

I. Completación

En las preguntas 1 a 6 complete los espacios en blanco. **NOTA**: En esta sección se califica sólo la respuesta y no se tiene en cuenta el procedimiento.

1. [10*pt*] Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Encontrar los valores propios de A.

Los valores propios de A son: $\lambda_1 =$ $\qquad\qquad\qquad$ $\lambda_2 =$

2. [10*pt*] Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas (Marque V o F según el caso).

   (a) [2*pt*] Si B es una matriz de tamaño 3×3, entonces necesariamente B tiene 3 valores propios distintos.

   $\boxed{V}\ \boxed{F}$

   (b) [2*pt*] Todo conjunto ortogonal de vectores no nulos en $\mathbb{R}^n$ es linealmente independiente.

   $\boxed{V}\ \boxed{F}$

   (c) [2*pt*] Toda base ortogonal es ortonormal.

   $\boxed{V}\ \boxed{F}$

   (d) [2*pt*] Si C es una matriz de tamaño 2×2 que tiene dos valores propios distintos, entonces C es necesariamente diagonalizable.

   $\boxed{V}\ \boxed{F}$

   (e) [2*pt*] Si W es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, entonces $(W^\perp)^\perp = W$.

   $\boxed{V}\ \boxed{F}$

3. [10pt] Sea $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Se sabe que $\lambda = 3$ es un valor propio de B. Encontrar un vector propio x de B asociado al valor propio $\lambda = 3$.

Un vector propio de B asociado al valor propio $\lambda = 3$ es $x = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$.

4. [10pt] Sea $\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} k \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$. Encontrar el valor de k para que $\mathcal{C}$ sea un conjunto ortogonal.

$k =$

5. [10*pt*] Sea $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$. Encontrar el valor de c para que Q sea una matriz ortogonal.

$c =$

6. [10*pt*] Sea A una matriz 2×2 tal que sus valores propios son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 3$, con vectores propios correspondientes $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Si $x = v_1 - 2v_2$, determine Ax.

$Ax =$

II. Solución con Procedimiento

En esta parte del examen se debe incluir el procedimiento necesario para determinar y justificar sus respuestas. Una respuesta correcta sin justificación recibirá máximo el 20% de los puntos correspondientes.

Por favor, revise sus cómputos. Una respuesta incorrecta como resultado de errores en los cómputos recibirá máximo el 70% de los puntos correspondientes.

7. [20*pt*] Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Se sabe que sus valores propios son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 2$.

   (a) [12*pt*] Encuentre una base ortogonal para $\mathbb{R}^3$ de vectores propios de A.

   (b) [8*pt*] Encuentre una matriz Q ortogonal y una matriz D diagonal tales que $A = QDQ^T$.

8. [20*pt*] Supongamos que $W = \text{gen}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

(a) [10*pt*] Encuentre una base para $W^{\perp}$.

(b) [10*pt*] Si $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, calcular $\text{proy}_W(v)$ y $\text{proy}_{W^\perp}(v)$.