Tercer Parcial – Algebra Lineal – 29/11/2014

Nombre: ______________________

Cédula: ______________ Grupo: ________

Profesor: ______________________

Puntaje. (Solo para uso oficial.)

1-2 (/21)	3-4 (/26)	5-11 (/53)	**Total** (/100)	**Nota**

Instrucciones. El examen consta de 3 hojas, verifique que su examen esté completo. Por favor mantenga las hojas grapadas. Complete los datos de identificación antes de comenzar el examen. La duración del examen es de 1 hora y 40 minutos. Justifique sus respuestas en los espacios asignados. No está permitido el uso de calculadora u otros aparatos electrónicos, ni sacar hojas en blanco o cualquier tipo de apuntes.

I. Solución con Procedimiento

1. (10pts) Suponga que el clima mes a mes de Medellín se comporta de acuerdo a una cadena de Markov. Si un mes es lluvioso, la probabilidad de que el siguiente mes sea lluvioso es $1/3$ y la probabilidad de que sea seco es $2/3$. Si un mes es seco, la probabilidad de que el siguiente mes sea seco es $1/4$ y la probabilidad de que sea lluvioso es $3/4$. Escriba la matriz de transición del proceso, y úsela para determinar la probabilidad de que diciembre sea un mes lluvioso, dado que octubre fue lluvioso.

2. (11pts) Suponga que una población puede clasificarse en categorías A, y B, y que la distribución de la población en dichas categorías puede modelarse como un proceso de Markov con matriz de transición

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & 0{,}7 \end{bmatrix}.$$

Si a largo plazo se observa que la distribución de la población en las categorías A y B se estabiliza, ¿cuál será dicha distribución a largo plazo?

3. (16pts) Identifique la superficie cuádrica con ecuación

$$2xy + z^2 + 2z = 0$$

y proporcione su ecuación en forma estándar.

Ayuda: La matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ tiene valores propios 1 y -1 con espacios propios

$$E_1 = \text{gen}\left\{ \mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \text{ y}$$

$$E_{-1} = \text{gen}\left\{ \mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

4. (10pts) Sea $\mathbf{u}$ un vector en $\mathbb{R}^n$ de longitud $\ell > 0$, y considere la matriz $P = \mathbf{u}\mathbf{u}^T$. Demuestre que $\mathbf{u}$ es vector propio de P asociado al valor propio ℓ^2.

II. Opción Múltiple y Completación

En las preguntas 5 a 11 complete los espacios en blanco, o elija la(s) opción(es) correcta(s) según el caso. Marque con una X la(s) letra(s) de su elección. En esta sección sólo se califica la respuesta y no se tiene en cuenta el procedimiento.

5. (7pts) Suponga que A es una matriz de 4×4 con valores propios $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = -1/3$, y $\lambda_3 = 2$, y espacios propios E_6 con base $\{\mathbf{v_1}\}$, $E_{-1/3}$ con base $\{\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}\}$, y E_2 con base $\{\mathbf{x_1}\}$. Sea $P = \left[\mathbf{v_1}|\mathbf{w_1}|\mathbf{w_2}|\mathbf{x_1}\right]$ la matriz con columnas $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{w_1}$, $\mathbf{w_2}$, y $\mathbf{x_1}$. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es cierta.

   (a) A no es diagonalizable porque tiene un valor propio negativo.

   (b) A no necesariamente es diagonalizable porque P no necesariamente es invertible.

   (c) A es diagonalizable porque tiene 3 espacios propios diferentes.

   (d) A es diagonalizable porque la multiplicidad algebraica de cada valor propio es igual a su multiplicidad geométrica.

(Espacio de borrador)

6. (8pts) Todos los valores de k tales que la matriz $A = \begin{bmatrix} k-1 & -1 & 1 \\ 0 & k & -1 \\ k-1 & -1 & k+3 \end{bmatrix}$ es no invertible son:

   (a) 0 y 1
   (b) 0, 1 y 2
   (c) 0, 1 y -2
   (d) 0, 1 y -1
   (e) Ninguna de las anteriores

   (Espacio de borrador)

7. (8pts) Considere la transformación lineal T de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ que refleja un vector del plano con respecto al eje y y luego multiplica el vector resultante por 2. Si A es la matriz asociada a la transformación T, escoja la(s) pareja(s) vector $\mathbf{v}$ y escalar λ tales que $\mathbf{v}$ es vector propio de A asociado al valor propio λ.

   (a) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\lambda = -2$
   (b) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\lambda = 2$
   (c) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\lambda = -2$
   (d) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\lambda = 2$

   (Espacio de borrador)

8. (7pts) Sea A la matriz de adyacencia de un digrafo con 4 vértices v_1, v_2, v_3, v_4. Suponga que las entradas de la tercera columna de A^2 suman 1. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones acerca del digrafo es cierta?

   (a) Hay una trayectoria de dos pasos que comienza en v_3.

   (b) Hay dos trayectorias de tres pasos que terminan en v_1.

   (c) Hay solo una trayectoria de dos pasos que termina en v_3.

   (d) Hay solo una trayectoria de tres pasos que termina en v_2.

   (e) Hay tres trayectorias de un paso que comienzan en v_2.

   __________(Espacio de borrador)__________

9. (8pts) Considere la base ortogonal de $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B} = \left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}.$$

   El vector de coordenadas de $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ con respecto a $\mathcal{B}$ es $[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$

   __________(Espacio de borrador)__________

10. (7pts) Considere el espacio vectorial

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : \begin{array}{c} 3x + 2y - 5z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{array} \right\},$$

y la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. El complemento ortogonal de W es

(a) El espacio fila de A
(b) El espacio columna de A
(c) El espacio nulo de A
(d) El espacio nulo de A^T
(e) Ninguno de los anteriores

________(Espacio de borrador)________

11. (8pts) Considere los vectores

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Un vector $\mathbf{v}$ en el espacio generado por $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ que es ortogonal a $\mathbf{v_1}$ y $\mathbf{v_2}$ es:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

________(Espacio de borrador)________