Tercer Examen Parcial de Álgebra Lineal
23 de Noviembre del 2015

Puntaje. Sólo para uso Oficial

$1-5$	6	7	8	**TOTAL**	**NOTA**

Instrucciones: La duración del examen es de 1 hora y 45 minutos. El examen consta de ocho preguntas en dos hojas impresas por ambos lados, verifique que su examen esté completo y consérvelo con el gancho. En las preguntas con procedimiento justifique sus respuestas en los espacios asignados. No está permitido sacar hojas en blanco ni ningún tipo de apuntes durante el examen, verifique que su celular esté apagado. No se permite el uso de calculadora.

IDENTIFICACIÓN

Nombre: ______________________________ Cédula ______________

Profesor: ______________________________ Grupo ______________

I. Completación

En las preguntas 1 a 5 complete los espacios en blanco. **NOTA**: En esta sección se califica sólo la respuesta y no se tiene en cuenta el procedimiento.

1. [8*pt*] Sea $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$. Encontrar los valores propios de C.

   Valores propios de C:

2. [12*pt*] Determine si las siguientes formas cuadráticas en $\mathbb{R}^2$ son definidas positivas, definidas negativas, semidemifinidas positiva, semidefinidas negativas, o ninguna de las anteriores.

   (a) [6*pt*] $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ ______________________________

   (b) [6*pt*] $x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$ ______________________________

3. [9*pt*] Suponga que la matriz $P = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 & 0.3 \\ a & b & 0.5 \\ c & 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}$ es una matriz de transición de probabilidad (Markov).

   Determine el rango de valores que pueden tomar los parámetros:

   [3*pt*] a ______________

   [3*pt*] b ______________

   [3*pt*] c ______________

4. [4*pt*] Dibuje un grafo cuya matriz de adyacencia sea $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

   [4*pt*]¿Cuántos caminos de 11 etapas (11-trayectorias) hay que parten del primer vértice y llegan al primer vértice? ______

5. [8*pt*] Sea A es una matriz, real, simétrica 3×3. ¿Las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas? (escriba V o F sobre la línea)

   (a) [2*pt*]______ A tiene necesariamente tres valores propios distintos.

   (b) [2*pt*]______ Las columnas de A son vectores mutuamente ortogonales.

   (c) [2*pt*]______ La matriz A es necesariamente diagonalizable.

   (d) [2*pt*]______ Hay una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de A.

II. Solución con Procedimiento

6. [10*pt*] Demuestre que si A es una matriz ortogonal $n \times n$ entonces el determinante de A es 1 o -1.

7. [20pt] Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Se sabe que los valores propios de A son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 5$.

   (a) [12pt] Encuentre una base ortogonal de vectores propios de A.

   (b) [8pt] Descomponga $A = QDQ^T$ donde D sea una matriz diagonal y Q una matriz ortogonal.

8. [25*pt*] Un agente comercial realiza su trabajo en tres ciudades A, B y C. Para evitar desplazamientos pasa cada noche en alguna de ellas, desplazándose al día siguente si es necesario. Después de trabajar un día en C, la probabilidad de tener que viajar a B es 0.4 y la de tener que ir a A es 0.2, en otro caso permanece en C. Si el viajante duerme un día en B, con probabilidad de 0.2 tendrá que seguir trabajando en la misma ciudad, de un 0.6 de viajar a C, mientras que irá a A en cualquier otro caso. Por útimo si el agente comercial trabaja todo un día en A, permanecerá en esa misma ciudad, al día siguiente, con una probabilidad 0.1, e irá a B con una probabilidad de 0.3.

   (a) [15*pt*] Si hoy el viajante está en C, ¿cuál es la probabilidad de que también tenga que trabajar en C al cabo de tres días?

   (b) [10*pt*] Al largo plazo ¿qué proporción de tiempo pasará el agente en cada una de las ciudades?