Tercer Examen Parcial de Álgebra Lineal
21 de noviembre de 2016

Puntaje. Sólo para uso Oficial

1 –5	6	7	8	**TOTAL**	**NOTA**

Instrucciones: La duración del examen es de 1 hora y 50 minutos. El examen consta de ocho preguntas en tres hojas impresas por ambos lados, verifique que su examen esté completo y consérvelo con el gancho. En las preguntas con procedimiento justifique sus respuestas en los espacios asignados. No está permitido sacar hojas en blanco ni ningún tipo de apuntes durante el examen, verifique que su celular esté apagado. No se permite el uso de calculadora.

IDENTIFICACIÓN

Nombre: ______________________________ Cédula ______________

Profesor: ______________________________ Grupo ______________

Esta hoja se deja en blanco para realizar cálculos.

I. Completación

En las preguntas 1 a 5 complete los espacios en blanco. **NOTA**: En esta sección se califica sólo la respuesta y no se tiene en cuenta el procedimiento.

1. [12*pt*] Diga si los siguientes enunciados son falsos o verdaderos: Escriba (V) verdadero o (F) falso según el caso.

   ( ) [3*pt*] Todo conjunto de vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ es ortogonal.

   ( ) [3*pt*] Sea A una matriz $n \times n$ y sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ los k valores propios diferentes de A. Si para todo $j = 1, \ldots, k$ se tiene $m_a(\lambda_j) = m_g(\lambda_j)$, entonces A es diagonalizable.

   ( ) [3*pt*] Si Q es una matriz ortogonal entonces $||x||$ y $||Qx||$ son iguales.

   ( ) [3*pt*] Si v es un vector propio correspondiente al valor propio $\lambda \neq 0$ de A, entonces $v \in col(A)$.

2. [10*pt*] En Medellín se ha guardado la información de la estatura de los niños en relación a la estatura de los padres. Se ha encontrado lo siguiente: a) Las probabilidades de que un padre alto tenga un hijo alto, de estaura media y bajo son $0.6, 0.2$ y 0.2, respectivamente. b) Las probabilidades de que un padre de estatura media tenga un hijo alto, de estaura media y bajo son $0.1, 0.7$ y 0.2, respectivamente. c) Para un padre bajo las probabilidades son $0.2, 0.4$ y 0.4, en el mismo orden.

   (a) [3*pt*] Escriba la matriz de transición P que representa el proceso de Markov. P =

   (b) [7*pt*] ¿Cuál será la distribución de la población en el largo plazo si actualmente es de 30% altos, 55% de mediana estatura y 15% bajos? Altos= Medianos= Bajos=

3. [12pt] Complete las siguientes oraciones

   (a) [3pt] Si $\lambda = 0$ es un valor propio de A, entonces $\boxed{nulidad(A) > \quad\quad}$

   (b) [3pt] Si A tiene k valores propios diferentes, entonces A^T tiene $\boxed{\quad}$ valores propios diferentes

   (c) [3pt] Si Q es ortogonal entonces $\boxed{det(Q) = \quad\quad}$

   (d) [3pt] Si W es un subespacio $\mathbb{R}^n$ de dimensión r entonces $\boxed{dim(W^{\perp}) = \quad\quad}$

4. [10pt] Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ de valores propios $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 3$ con vectores propios $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

   (a) [3pt] Utilice la información anterior para escribir la ecuación $2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 = 10$ en forma estándar después de realizar un cambio de variables, es decir, escriba la ecuación sin términos mixtos.

   Respuesta:

   (b) [7pt] Describa explícitamente el cambio de variables que produce la nueva ecuación.

   Respuesta:

5. [6*pt*] Encuentre una matriz B de orden 2×2 con valores propios $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = -2$ y correspondientes vectores propios ortogonales $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$B=$

II. Solución con Procedimiento

6. [10*pt*] Suponga que A matriz de tamaño $n \times n$ que es semejante a I_n. Demuestre que $A = I_n$.

7. [20*pt*] Sea $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + y = 0, 3x - z = 0 \right\}$.

   (a) [12*pt*] Encuentre una base ortogonal para $W^{\perp}$.

   (b) [8*pt*] Sea $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$. Encuentre $\text{proy}_W(v)$ y $\text{proy}_{W^{\perp}}(v)$.

8. [20*pt*] $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

   (a) [12*pt*] Calcule los valores propios y los correspondientes vectores propios de A.

   (b) [8*pt*] ¿ Es A diagonalizable? Por favor explicar su respuesta. En caso afirmativo, encontrar matrices P invertible y D diagonal tales que $A = PDP^{-1}$.