Tercer Examen Parcial de Álgebra Lineal
20 de Noviembre de 2017

Puntaje. Sólo para uso Oficial

1 –4	5	6	7	8	**TOTAL**	**NOTA**

Instrucciones: La duración del examen es de 1 hora y 50 minutos. El examen consta de ocho preguntas en tres hojas impresas por ambos lados, verifique que su examen esté completo y consérvelo con el gancho. En las preguntas con procedimiento justifique sus respuestas en los espacios asignados. No está permitido sacar hojas en blanco ni ningún tipo de apuntes durante el examen, verifique que su celular esté apagado. No se permite el uso de calculadora.

IDENTIFICACIÓN

Nombre: ______________________________ Cédula ______________

Profesor: ______________________________ Grupo ______________

Espacio en blanco para realizar cómputos

I. Completación

En las preguntas 1 a 4 complete los espacios en blanco. **NOTA**: En esta sección se califica sólo la respuesta y no se tiene en cuenta el procedimiento.

1. [15*pt*] Sea A una matriz 3×3 tal que sus valores propios son $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$ y sus correspondientes espacios propios están dados por:

$$E_{-1} = gen\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{y} \quad E_{-2} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x = y = z \right\}.$$

Señale el valor de verdad de cada enunciado. (Marque V o F según sea el caso).

(a) [3*pt*] A es una matriz simétrica. $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

(b) [3*pt*] El determinante de la matriz A es -2. $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

(c) [3*pt*] La matriz $A - 2I$ es invertible. $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

(d) [3*pt*] El polinomio característico de A es $-(\lambda+1)^3(\lambda+2)$. $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

(e) [3*pt*] La matriz $A + 2I$ es semejante a la matriz $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

2. [12*pt*] Los habitantes de cierta tribu nativa de África están distribuidos en dos regiones X y Y. Se determinó que cada mes el 25% de los habitantes del la región X migra a la región Y y el 75% restante se queda en la región X. También se determinó que cada mes el 10% de los habitantes de la región Y migra a la región X y el restante 90% se queda en la región Y.

(a) [4*pt*] Escriba la matriz de transición P que representa el proceso de Markov. $P =$

(b) [8*pt*] ¿Cuál será la distribución de la población en el largo plazo si inicialmente habían 10000 habitantes en la región X y 11000 habitantes en la región Y?

Región X= Región Y=

3. [5*pt*] Dar una ejemplo de un grafo G cuya matriz de adyacencia sea la matriz $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

4. [12*pt*] Sea $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Se sabe que los valores propios de C son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 3$ y que $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ es un vector propio asociado al valor propio -1.

   (a) [8*pt*] Halle una matriz ortogonal Q tal que $Q^T C Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

   $Q =$

   (b) [4*pt*] Utilice la información anterior para escribir la ecuación $x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 = 10$ en forma estándar después de realizar un cambio de variables, es decir, escriba la ecuación sin términos mixtos.

   Respuesta:

II. Solución con Procedimiento

5. [10*pt*] Suponga que A y B son matrices semejantes. Demuestre que A y B tienen el mismo polinomio característico.

6. [10*pt*] Calcular el polinomio característico de la matriz $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

7. [20*pt*] Considere el subespacio de $\mathbb{R}^3$ definido por:

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \, x + y + z = 0 \right\}.$$

   (a) [12*pt*] Encuentre una base ortonormal para W.

   (b) [8*pt*] Si $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, encontrar $\text{proy}_W(v)$ y $\text{proy}_{W^\perp}(v)$.

8. [16*pt*] Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Se sabe que los valores propios de A son $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$ y $\lambda_3 = -1$. Determine si A es diagonalizable. En caso afirmativo, encuentre una matriz P invertible y una matriz diagonal D tales que $A = PDP^{-1}$.