Tercer Examen Parcial de Álgebra Lineal – Tema A
28 de noviembre de 2022

Puntaje (Solo para uso Oficial)

1-2a [21pts]	2b-3 [25pts]	4-6 [19pts]	7 [15pts]	8 [20pts]	**TOTAL** [100pts]	**NOTA** [5.0]

Instrucciones: La duración del examen es de 1 hora y 50 minutos. El examen consta de ocho preguntas en tres hojas impresas por ambos lados, verifique que su examen esté completo. En las preguntas con procedimiento justifique sus respuestas en los espacios asignados. No está permitido sacar hojas en blanco ni ningún tipo de apuntes durante el examen. Verifique que su celular esté apagado. No se permite el uso de calculadora.

IDENTIFICACIÓN

Nombre: ______________________________ Cédula ______________

Profesor: ______________________________ Grupo ______________

Espacio en blanco para realizar cómputos

I. Completación

En las preguntas 1 a 6 escriba su respuesta en los espacios indicados. **NOTA**: Tenga en cuenta que en esta sección se califica solo la respuesta escrita en el espacio indicado y no se tiene en cuenta el procedimiento.

1. [15*pt*] Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas (Marque V o F según el caso).

   (a) [3*pt*] La transformación lineal $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $S\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x+y+z \\ y+z \end{bmatrix}$ es un isomorfismo.
   . $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

   (b) [3*pt*] Sea A una matriz $n \times n$. Entonces, rango$(A) < n$ si y solo si los valores propios de A son diferentes de cero. $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

   (c) [3*pt*] Si λ es valor propio de A entonces $-\lambda$ es valor propio de $-A$. $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

   (d) [3*pt*] Si A es una matriz cuadrada y $\dim((\text{Ren}(A))^\perp) > 0$ entonces A es invertible. $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

   (e) [3*pt*] Si Q es una matriz $n \times n$ ortogonal entonces para todo vector v en $\mathbb{R}^3$ se tiene que v y Qv son ortogonales. $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

2. [13*pt*] Sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$, donde $b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, una base de $\mathbb{R}^2$ y sea $\mathcal{C}$ la base dada por $\mathcal{C} = (b_1 + b_2, b_1 - b_2)$.

   (a) [6*pt*] Si para un vector v en $\mathbb{R}^2$ se tiene $[v]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, determine $[v]_{\mathcal{B}}$.

   $[v]_{\mathcal{B}} =$

(b) [7*pt*] Determine la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$.

$P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} =$

3. [18*pt*] Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) [6*pt*] Determine los valores propios de A.

$\lambda_1 =$

$\lambda_2 =$

(b) [6*pt*] Sea λ^* el mayor entre los valores propios de A. Determine el espacio propio E_{λ^*}.

$E_{\lambda^*} =$

(c) [6*pt*] Determine las multiplicidades geométricas de los valores propios de A.

m.g.$(\lambda_1) =$

m.g.$(\lambda_2) =$

4. [6*pt*] Sea B una matriz 2×2 tal que sus valores propios son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = -1$, con vectores propios correspondientes $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Si $x = 3v_1 - 5v_2$, determine B^3x.

$B^3x =$

5. [6*pt*] Sea $V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{ll} x - 2y + z & = 0 \\ x + y + z & = 0 \end{array} \right\}$. Determine una base $\mathcal{B}$ para el complemento ortogonal $V^\perp$.

$\mathcal{B} =$

6. [7*pt*] Sea $W = \text{gen}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$. Para $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ determine $w \in W$ y $w' \in W^\perp$ tales que $v = w + w'$, es decir, calcule $\text{proy}_W v$ y $\text{proy}_{W^\perp} v$.

$w =$

$w' =$

II. Solución con Procedimiento

En esta parte del examen debe incluir el procedimiento necesario para determinar y justificar sus respuestas. Una respuesta correcta sin justificación recibirá máximo el 20% de los puntos correspondientes.

Por favor, revise sus cómputos. Una respuesta incorrecta como resultado de errores en los cómputos recibirá máximo el 70% de los puntos correspondientes.

7. [15*pt*] Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por $T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y + z \\ x - z \\ -y + 2z \end{bmatrix}$.

   Determine bases $\mathcal{B}_I$ y $\mathcal{B}_N$ para los espacios $\mathrm{Im}(T)$ y $\mathrm{Núcleo}(T)$.

8. [20*pt*] Una matriz 4×4 simétrica A tiene como únicos valores propios $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$ y el espacio propio correspondiente a λ_1 es $E_{\lambda_1} = \text{gen}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\\-1\end{bmatrix}\right)$.

(a) [10*pt*] Determine una base para el espacio propio E_{λ_2} correspondiente a λ_2.

(b) [10*pt*] Determine matrices D diagonal y Q ortogonal tales que $D = Q^T AQ$, es decir, $A = QDQ^T$.