Tercer Examen Parcial de Álgebra Lineal
25 de noviembre de 2023

Puntaje. Sólo para uso Oficial

1-3	4-6	7-8	9-10	**TOTAL**	**NOTA**

Instrucciones: La duración del examen es de 1 hora y 50 minutos. El examen consta de diez preguntas en tres hojas impresas por ambos lados, verifique que su examen esté completo. No está permitido sacar hojas en blanco ni ningún tipo de apuntes durante el examen, verifique que su celular esté apagado. No se permite el uso de calculadora.

IDENTIFICACIÓN

Nombre: ______________________________ Cédula ______________

Profesor: ______________________________ Grupo ______________

Espacio en blanco para realizar cómputos

1. [10*pt*] Considere la transformación lineal $F : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por $F(A) = A^T - A$. La dimensión del nucleo de F es:

(a) 1	(b) 2	(c) 3	(d) 4

2. [10*pt*] Considere la transformación lineal $G : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por $G(A) = A^T + A$. La dimensión de la imagen de G es:

(a) 4	(b) 3	(c) 2	(d) 1

3. [10*pt*] Sea $\mathcal{E}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ dos bases de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ y } P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz de cambio de base de la base $\mathcal{B}$ a la base $\mathcal{C}$, $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$, es:

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	(b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	(c) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	(d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

4. [10*pt*] Considere la base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ dada por $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. La matriz de cambio de base de la base canónica $\mathcal{E}$ a la base $\mathcal{B}$, $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}$ está dada por:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. [10*pt*] Sea $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. ¿Cuál de los siguientes es un vector propio de A?

(a) $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

6. [10*pt*] Sea $\mathcal{B}$ la base ortonormal de la pregunta 4 y sea Q la matriz de 3×3 cuyas columnas son los elementos de $\mathcal{B}$. Sean $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$ y $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$. El vector $Q(u+v)$ tiene magnitud $||Q(u+v)||$ igual a:

(a) 1 (b) 3 (c) 5 (d) 0

7. [10*pt*] ¿Cuál de las siguientes matrices no es diagonalizable?

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

8. [10*pt*] Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ y sea $W = (\text{Nucleo(A)})^{\perp}$. Sea $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. La proyección de v sobre W, $\text{Proy}_{\text{W}}(\text{v})$, es igual a:

(a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	(b) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	(c) $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$	(d) $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

9. [10*pt*] Sea A una matriz simétrica de 3×3 tal que Nucleo(A) es generado por $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Suponga que $\lambda = 2$ es un valor propio de A con multiplicidad algebraica 2.

Entonces A debe ser igual a:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	(b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	(d) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

10. [10*pt*] Considere la cónica dada por $5x^2 + 12xy = 36$. Después de una rotación de ejes, ¿cuál de las siguientes cónicas describe la cónica original?

(a) $\frac{(x')^2}{4} + \frac{(y')^2}{9} = 1$	(b) $\frac{(x')^2}{4} - \frac{(y')^2}{9} = 1$	(c) $\frac{(x')^2}{4} + \frac{(y')^2}{4} = 1$	(d) $\frac{(x')^2}{9} + \frac{(y')^2}{9} = 1$