Tercer Examen Parcial de Álgebra Lineal
30 de Mayo de 2018

Puntaje. Sólo para uso Oficial

1 – 5	6	7	8	**TOTAL**	**NOTA**

Instrucciones: La duración del examen es de 1 hora y 50 minutos. El examen consta de ocho preguntas en tres hojas impresas por ambos lados, verifique que su examen esté completo. En las preguntas con procedimiento justifique sus respuestas en los espacios asignados. No está permitido sacar hojas en blanco ni ningún tipo de apuntes durante el examen, verifique que su celular esté apagado. No se permite el uso de calculadora.

IDENTIFICACIÓN

Nombre: ____________________________________ Cédula ______________

Profesor: ____________________________________ Grupo ______________

Espacio en blanco para realizar cómputos

I. Completación

En la pregunta 1 marque V o F, y en las preguntas 2 a 5 complete los espacios en blanco. **NOTA**: En esta sección se califica sólo la respuesta y no se tiene en cuenta el procedimiento. No hay crédito parcial por respuestas incorrectas.

1. [20*pt*] Señale el valor de verdad de cada enunciado.

   (a) [4*pt*] Si el único valor propio de una matriz diagonalizable A es $\lambda = 2$, entonces $A^2 = 2I$. $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

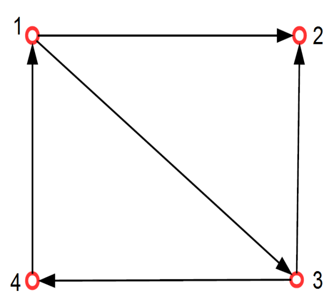
   (b) [4*pt*] Las matrices $C = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ **NO** son semejantes. $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

   (c) [4*pt*] Si el polinomio característico de una matriz A es $-(\lambda - 2)^2(\lambda + 3)$, entonces A es semejante a la matriz $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

   (d) [4*pt*] Cualquier matriz 3×3 que tenga polinomio caraterístico igual a $-(\lambda - 36)(\lambda - 2)(\lambda - 49)$ siempre es diagonalizable. $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

   (e) [4*pt*] Si Q es una matriz ortogonal, entonces $\|Qx\| = 1$ para todo vector unitario $x \in \mathbb{R}^n$. $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

2. [5*pt*] Encontrar la matriz de adyacencia $A(G)$ del siguiente dígrafo G.



$A(G) =$

3. [10*pt*] Sea $Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$, tal que $Q^T AQ = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) [5*pt*] Una base **ortonormal** para $W = E_5$, el espacio propio de A asociado al valor propio $\lambda = 5$ es:

(b) [5*pt*] Calcular la **proyección ortogonal** de $v = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ sobre $W = E_5$.

$\text{proy}_W(v) =$

4. [10*pt*] Suponga que B es una matriz 3×3 cuyos espacios propios son $H = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x - y + z = 0 \right\}$ y $S = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$, y cuyo polinomio característico es $p_B(\lambda) = -(\lambda - 3)^2(\lambda + 3)$. Entonces, B se puede factorizar de la forma $B = PDP^{-1}$, con D matriz diagonal, donde

$P =$ y $D =$

5. [5*pt*] Calcular el polinomio característico de la matriz

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & -4 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

$p_C(\lambda) =$

II. Solución con Procedimiento

En esta sección se deben incluir los detalles del procedimiento para llegar a la respuesta deseada, incluyendo todas las partes que se requieran explícitamente.

6. [10*pt*] Supongamos que A es una matriz diagonalizable de orden $n \times n$. Demostrar que $A^2 - 2I_n$ también es diagonalizable. **Nota:** Aquí I_n denota la matriz identidad $n \times n$.

7. [25*pt*] Suponga que una industria de refrescos produce dos gaseosas A y B. Cuando una persona ha comprado la gaseosa A en un mes hay una probabilidad de $1/4$ de que siga comprándola el siguiente mes y la probabilidad de que el siguiente mes compre la gaseosa B es de $3/4$. Si una persona ha comprado la gaseosa B, hay una probabilidad de $1/3$ de que repita el mes siguiente y una probabilidad de $2/3$ de que el mes siguiente compre la gaseosa A.

   (a) [7*pt*] Escriba la matriz de transición del proceso.

   (b) [8*pt*] Suponiendo que en mayo una persona adquirió la gaseosa A, determine la probabilidad de que en julio del mismo año la persona compre la gaseosa A.

   (c) [10*pt*] Dadas estas condiciones, determinar las probabilidades de consumo de las gaseosas A y B a largo plazo.

8. [15pt] Sea

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{c} x + 2y + 2z - 2w = 0, \\ -x + y + z + w = 0 \end{array} \right\}.$$

Halle una base **ortogonal** para $V^{\perp}$, es decir, encuentre una base ortogonal para el complemento ortogonal de V.