Álgebra Lineal – Taller No 2

Instrucciones. Recuerde que los ejercicios marcados con * indican un mayor nivel de dificultad que el resto y es importante que el estudiante ataque una razonable cantidad de ellos por sí mismo.

Proyecciones

1.* Para dos vectores u y v en $\mathbb{R}^n$ con $u \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$, demuestre que la **proyección de** v **sobre** u, denotada por $\operatorname{proy}_u(v)$, satisface

$$\operatorname{proy}_u(v) = \frac{u \cdot v}{\|u\|^2}\, u = \frac{u \cdot v}{u \cdot u}\, u.$$

Consejo: Grafique la situación.

2. Considere los vectores $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Encontrar $\operatorname{proy}_{\mathbf{y}}(\mathbf{z})$.

3. Decida si la siguiente afirmación es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

   Si u y v son vectores no nulos, entonces $(u - proy_v(u)) \cdot u = 0$.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

4. Determine *geométricamente* si cada uno de los siguientes sistemas tiene solución única, un número infinito de soluciones o ninguna solución. Posteriormente resuelva *algebraicamente* el problema para confirmar su respuesta

$$(a)\ \begin{aligned} x + y &= 0 \\ 2x + y &= 3 \end{aligned} \qquad (b)\ \begin{aligned} x - 2y &= 7 \\ 3x + y &= 7 \end{aligned} \qquad (c)\ \begin{aligned} 3x - 6y &= 3 \\ -x + 2y &= 1 \end{aligned}$$

5. Resuelva el sistema dado mediante sustitución hacia atrás

$$(a)\ \begin{aligned} 2u - 3v &= 5 \\ 2v &= 6 \end{aligned} \qquad (b)\ \begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ 2y - z &= 1 \\ 3z &= -1 \end{aligned} \qquad (c)\ \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ -5x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$(d)\ \begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_3 - x_4 &= 0 \\ x_4 &= 1 \end{aligned} \qquad (e)\ \begin{aligned} x - 3y + z &= 5 \\ y - 2z &= -1 \end{aligned}$$

6. Escoja la mejor estrategia para resolver los siguientes sistemas

$$(a)\ \begin{aligned} x &= 2 \\ 2x + y &= -3 \\ -3x - 4y + z &= -10 \end{aligned} \qquad (b)\ \begin{aligned} x_1 &= -1 \\ -\tfrac{1}{2}\,x_1 + x_2 &= 5 \\ -\tfrac{3}{2}\,x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7 \end{aligned}$$

7. Encuentre las matrices aumentadas de los siguientes sistemas lineales

$$(a)\ \begin{aligned} x - y &= 0 \\ 2x + y &= 3 \end{aligned} \qquad (b)\ \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad (c)\ \begin{aligned} x + 5y &= -1 \\ -x + y &= -5 \\ 2x + 4y &= 4 \end{aligned} \qquad (d)\ a - 2b + d = 2$$

8. Encuentre un sistema lineal cuya matriz aumentada coincida con las matrices siguientes

$$(a)\ \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \qquad (b)\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

9. En cada uno de los siguientes ejemplos determine si la matriz dada está en forma escalonada por renglones. De estarlo indique también si está en forma escalonada reducida por renglones

$$(a)\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&3\\0&1&0\end{bmatrix}\qquad (b)\begin{bmatrix}7&0&1&0\\0&1&-1&4\\0&0&0&0\end{bmatrix}\qquad (c)\begin{bmatrix}0&1&3&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\qquad (d)\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$(e)\begin{bmatrix}1&0&3&-4&0\\0&0&0&0&0\\0&1&5&0&1\end{bmatrix}\qquad (f)\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\qquad (g)\begin{bmatrix}1&2&3\\1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad (h)\begin{bmatrix}2&1&3&5\end{bmatrix}$$

10. Considere las siguientes matrices

$$(a)\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\qquad (b)\begin{bmatrix}3&2\\1&4\end{bmatrix}\qquad (c)\begin{bmatrix}3&5\\5&-2\\2&4\end{bmatrix}$$

$$(d)\begin{bmatrix}2&-4&-2&6\\3&-6&2&6\end{bmatrix}\qquad (e)\begin{bmatrix}3&-2&-1\\2&-1&-1\\4&-3&-1\end{bmatrix}\qquad (f)\begin{bmatrix}-2&6&-7\\3&-9&10\\1&-3&3\end{bmatrix}$$

(I) Utilice operaciones elementales de fila para llevar cada matriz a su forma escalonada por renglones.

(II) Utilice operaciones elementales de fila para llevar cada matriz a su forma escalonada reducida por renglones.

11.* Escriba todas las posibles formas escalonadas reducidas por renglones de matrices de 3×3?

12. Resuelva los siguientes sistemas utilizando eliminación Gausiana con sustitución hacia atrás y por el método de Gauss-Jordan.

$$(a)\quad \begin{aligned} x_1+2x_2-3x_3&=9\\ 2x_1-x_2+x_3&=0\\ 4x_1-x_2+x_3&=4\end{aligned}\qquad\qquad (b)\quad \begin{aligned} x_1-3x_2-2x_3&=0\\ -x_1+2x_2+x_3&=0\\ 2x_1+4x_2+6x_3&=0\end{aligned}$$

$$(c)\quad \begin{aligned} 3w+3x+y&=1\\ 2w+x+y+z&=1\\ 2w+3x+y-z&=2\end{aligned}\qquad\qquad (d)\quad \begin{aligned} 2r+s&=3\\ 4r+s&=7\\ 2r+5s&=-1\end{aligned}$$

13. Demuestre que si $ad-bc\neq 0$ entonces el siguiente sistema tiene solución única: $\begin{aligned} ax+by&=r\\ cx+dy&=s\end{aligned}$

14. Para cada uno de los siguientes casos, proporcione un ejemplo dando ecuaciones de planos en $\mathbb{R}^3$.

(I) Tres planos que tengan una recta de intersección común.

(II) Tres planos que se intersecten por pares pero que no tengan un punto común de intersección.

(III) Tres planos que se intersecten en un solo punto.

15. Encuentre un valor de k para el cual el siguiente sistema tiene infinitas soluciones: $\begin{aligned} 3x+2y&=10\\ 6x+4y&=k\end{aligned}$

16.** Demuestre que un sistema lineal no puede tener exactamente dos soluciones.
Ayuda: Para demostarar esta afirmación se puede probar que si un sistema tiene dos soluciones distintas, entonces el sistema tiene infinitas soluciones. Para ver esto suponga que un sistema tiene dos soluciones distintas $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$. Demuestre que cualquier punto en el segmento de recta que pasa por $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ también es una solución.

17.* Suponga que la eliminación Gaussiana arroja el sistema $\begin{aligned} x+y+z&=0\\ y+z&=0\\ z&=0\end{aligned}$ Encuentre tres posibles matrices originales.

18.* Suponga que una matriz A es de 4×3 y que el sistema homogéneo que determina tiene infinitas soluciones. ¿Cuál es el máximo valor posible del rango de A? ¿Cuál es el mínimo valor posible del rango de A?

19.* Suponga que una matriz A tiene cuatro filas y que el sistema homogéneo que determina tiene solución única. ¿Cuál es el máximo valor posible del rango de A? ¿Cuál es el mínimo valor posible del rango de A?

20. Complete los conceptos faltantes

   (I) Si A es de 3×7 entonces su rango es a lo sumo:

   (II) Sistemas de ecuaciones equivalentes tienen las mismas:

   (III) Si una matriz no nula de 3×3 tiene todas sus entradas idénticas, entonces su rango es:

21.* Establezca la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones, justifique sus respuestas

   (I) Si un sistema es inconsistente, entonces el rango de su matriz aumentada supera el número de incógnicas.

   (II) Todo sistema homogéneo es consistente.

   (III) Un sistema de tres ecuaciones lineales y cuatro incógnitas tiene infinitas soluciones.

   (IV) Todo sistema homogéneo con mas ecuaciones que incógnitas tiene solución no trivial.

Matlab

22. Ver videos 5-7 del tutorial de Matlab.

23. Verificar los resultados de los ejercicios 2, 5, y 12 en Matlab

24. Ejecute en Matlab

25.
```
>> u = [-3, 4, 2];   % vector fila
>> u = [-3 4 2];   % la coma se puede omitir
>> u(2)   % entrada 2
>> v= [4; 5; 6]; w = [2; -1; 2]; %vectores columna
>> v(3)
>> x = v+w
>> y = u'    % transposición
>> y = u'+v+w
>> y = v.*w % producto elemento a elemento
>> u*w  % producto matricial ( = producto punto)
>> w*u
>> dot(v,w)  % producto punto
>> dot(u,v)
>> v/norm(v)  % normalización
>> acos(dot(v,w)/(norm(v)*norm(w)))  % ángulo
```

26.
```
>> x = 1:2:12   % comienzo: incremento: final
>> z = 1:12  % comienzo:final
>> y = [1 3 5 7 9 11]
>> x-y
>> y+3
>> (2*ones(1,5)).^(0:4)
>> (zeros(1,5)+2).^(0:4)
```

27.
```
>> y = 0:10:110
>> size(y)  % tamaño como matriz
>> length(y)  % longitud
>> y([3 6 9]) % selección de entradas 3, 6 y 9
>> y([3:9]) % entradas 3 a 9
>> y([1:3 6:9])
>> y([1:3; 6:8])
```

28.
```
>> H = [10 20 30 40; 50 60 70 80]
>> H(2,3)
>> H(:,3)
>> H(2,:)
>> H ( :, [ 1 3:4 ] )
>> u = [1;2;3]
>> v = [4;5;6]
```

```
>> A = [u v]
>> B = [u; v]
>> C = [u' v']
>> D = [u'; v']
>> zeros(3,4)
>> ones(3,4)
>> rand(3,5)  % matriz con entradas
>>               % aleatorias en [0,1]
```

29.
```
>> A = [1 2 3 4; 5 6 7 8]
>> size(A)  % dimensiones de A
>> size(A,1)
>> size(A,2)
>> A - 2  % resta a todas las entradas
>> 2*A
>> A = [1 2 3 4; 5 6 7 8; 9 10 11 12]
>> B = [1 1 1 1; 2 2 2 2; 3 3 3 3]
>> C = B'  % transposición
>> A-B
>> A*B % Error !
>> B*A % Error !
>> A.*B % multiplicación entrada por entrada
>> A./B % división entrada por entrada
>> B.\A % ?
>> A*C
>> C*A
>> A*C-C*A
```

30.
```
>> rand(3)
>> A = fix(rand(3)*10)
>> A^2
>> A^2 - A*A
>> A.^2 % potencia de cada entrada
>> A.^2 - A*A
>> inv(A)  % matriz inversa
>> A*[2; 3; 1]
>> rank(A)
>> rref(A)  % forma escalonada reducida
```

31. Otras operaciones para crear matrices

```
>> A = [1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]
>> diag(A)   % vector con la diagonal de A
>> diag([1 2 3]) % crea matriz diagonal
>> diag(diag(A))
>> diag([1 2 3],1)
>> diag([1 2 3],-2)
>> triu(A) % parte triangular superior
>> tril(A)  % parte triangular inferior
```