Álgebra Lineal – Taller No 1

Instrucciones. Los ejercicios marcados con * indican un mayor nivel de dificultad que el resto. Es importante que el estudiante ataque una razonable cantidad de ellos, por sí mismo, para alcanzar el nivel requerido de entendimiento del material.

Vectores

1. Dibuje los siguientes vectores de $\mathbb{R}^2$ en posición estándar.

$$(a)\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix},\qquad (b)\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix},\qquad (c)\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix},\qquad (d)\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}.$$

2. Dibuje los vectores del ejercicio anterior si los orígenes (colas) están sobre el punto $(1,-3)$.

3. Dibuje los siguientes vectores en posicion estándar en $\mathbb{R}^3$

$$(a)\,\mathbf{a}=[0,2,0],\qquad (b)\,\mathbf{b}=[3,2,1],$$
$$(c)\,\mathbf{c}=[1,-2,1],\qquad (d)\,\mathbf{d}=[-1,-1,-2].$$

4. Si los vectores del ejercicio anterior se trasladan de manera que sus puntas (cabezas) estén en el punto $(1,2,3)$, encuentre los puntos que correspondan a sus orígenes (colas).

Producto Punto

5. En cada caso, calcule el producto punto $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$:

$$(a)\,\mathbf{u}=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix},\ \mathbf{v}=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\qquad (b)\,\mathbf{u}=\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix},\ \mathbf{v}=\begin{bmatrix}9\\6\end{bmatrix}$$
$$(c)\,\mathbf{u}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\ \mathbf{v}=\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}\qquad (d)\,\mathbf{u}=[1,\sqrt{2},\sqrt{3},0]\,,\ \mathbf{v}=[4,-\sqrt{2},0,-5]$$

6. Para cada vector $\mathbf{u}$ del ejercicio 6, encuentre la longitud de $\mathbf{u}$ y un vector unitario en dirección de $\mathbf{u}$.

7. Si $\mathbf{u},\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son vectores de $\mathbb{R}^n$ con $n\geq 2$, explique por qué las siguientes expresiones no tienen sentido.

$$(a)\,\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})\qquad (b)\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{w}$$

8. En cada caso determine si el ángulo entre los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es agudo, obtuso o recto

$$(a)\,\mathbf{u}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix},\ \mathbf{v}=\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}\qquad (b)\,\mathbf{u}=\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix},\ \mathbf{v}=\begin{bmatrix}1\\-2\\-1\end{bmatrix}$$
$$(c)\,\mathbf{u}=[5,4,-3]\,,\ \mathbf{v}=[1,-2,-1]\qquad (d)\,\mathbf{u}=[1,2,3,4]\,,\ \mathbf{v}=[-3,1,2,-2]$$

9.* Recuerde que los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ son $\mathbf{i}=[1,0,0]$, $\mathbf{j}=[0,1,0]$ y $\mathbf{k}=[0,0,1]$. Considere los vectores

$$I.\,\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}\qquad II.\,\mathbf{i}+\mathbf{k}\qquad III.\,\mathbf{j}-\mathbf{k}$$

¿Cuales de estos vectores son ortogonales a $\mathbf{v}=\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$?

$(a)\,I$ únicamente $\quad(b)\,II$ únicamente $\quad(c)\,III$ únicamente $\quad(d)\,II$ y III únicamente $\quad(e)$ Todos

10.* Un cubo tiene cuatro diagonales, demuestre que ningún par de ellas son perpendiculares.

11.* Dados $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^N$ y $c\in\mathbb{R}$ arbitrarios demuestre las siguientes propiedades (**Sugerencia:** En algunas de estas demostraciones resulta útil recordar que para cualquier vector $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^N$ se tiene que $\|\mathbf{u}\|^2=\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$).

(I) Simetría $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|=\|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|$.

(II) Desigualdad triangular $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$. **Indicación.** Recuerde la desigualdad de Cauchy-Schwartz $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|$.

(III) Linealidad respecto del producto escalar $c(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = (c\,\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot(c\,\mathbf{v})$.

(IV) Desigualdad triangular reversada $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| \geq \|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\|$. **Indicación.** Sustituya $\mathbf{u}$ por $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ en la desigualdad triangular.

(V) Ley del paralelogramo $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = 2\,\|\mathbf{u}\|^2 + 2\,\|\mathbf{v}\|^2$. **Comentario.** Un dibujo le permitirá comprender el nombre de la propiedad.

(VI) $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|$ si y solo si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales.

(VII) $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ son ortogonales si y solo si $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$.

12. Decida si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa

(I) En $\mathbb{R}^3$, si un vector $\mathbf{u}$ es perpendicular a $\mathbf{v}$ y a $\mathbf{w}$, entonces $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son paralelos.

(II) En $\mathbb{R}^n$, si $\mathbf{u}$ es perpendicular a $\mathbf{v}$ y a $\mathbf{w}$ entonces también es perpendicular a $\mathbf{v}+2\mathbf{w}$.

(III) En $\mathbb{R}^n$, si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son perpendiculares entonces $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| = \sqrt{2}$.

13. Encuentre dos vectores $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ que sean perpendiculares entre sí y perpendiculares a $[1,0,1]$.

14. ¿Que longitud tiene el vector $\mathbf{u} = [1,1,\ldots,1] \in \mathbb{R}^9$? Encuentre un vector unitario en la dirección de $\mathbf{u}$ y un vector $\mathbf{v}$ ortogonal a $\mathbf{u}$.

15.* Suponga que $\|\mathbf{u}\| = 5$ y $\|\mathbf{v}\| = 3$, ¿Cuales son los valores mínimo y máximo de $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|$? ¿Cuales son los valores mínimo y máximo de $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$?

Operaciones con Matrices

16. Considere las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 10 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 4 & 2 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Calcule las matrices indicadas, de ser posible

a) $A+2D$ *b)* $2D-5A$ *c)* $B-C$

d) $B-C^T$ *e)* AB *f)* B^2

g) $DA-AD$ *h)* $(I_2-A)^2$

17. De un ejemplo de una matriz A de tamaño 3×3 y distinta de cero tal que $A^2 = 0$.

18. Considere las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

(I) Use la representación matriz-columna del producto para escribir cada columna de AB como una combinación lineal de las columnas de A.

(II) Utilice la representación renglón-matriz del producto para escribir cada renglón de AB como una combinación lineal de los renglones de B.

19. Sea $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

(I) Calcule $A^2, A^3, \ldots, A^7$.

(II) Encuentre la matriz A^{2001}, justifique su respuesta.

20. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Encuentre una fórmula para A^n con $n \geq 1$.

21.* Sea $A = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$.

(I) Demuestre que $A^2 = \begin{bmatrix} \cos(2t) & -\sin(2t) \\ \sin(2t) & \cos(2t) \end{bmatrix}$.

(II) Conjeture la regla para A^n.

22. (I) Con $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, calcule las matrices PQ, QP y P^2.

    (II) Proporcione ejemplos de cuatro matrices M de tamaño 3×3 tales que $M^2 = I_3$.

23. En este problema asumimos que $A, B \in M_{n\times n}$. Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justifique su respuesta con una prueba en caso de ser verdadera o con un contraejemplo en caso de ser falsa

    (I) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

    (II) $(AB)^2 = A^2B^2$.

    (III) Si las columnas 1 y 3 de B son iguales, tambien lo son las columnas 1 y 3 de AB.

    (IV) Si las filas 1 y 3 de B son iguales, tambien lo son las filas 1 y 3 de AB.

    (V) Si las filas 1 y 3 de A son iguales, también lo son las filas 1 y 3 de AB.

24. Demuestre que $AB = BA$ si y solo si $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$

25.* En cada caso escoja la única $B \in M_{3\times 3}$ tal que para toda $A \in M_{3\times 3}$ se cumpla la condición:

    (I) $BA = 4A$.

    (II) Las filas 1 y 3 de BA son las filas 3 y 1 de A respectivamente.

26. Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justifique su respuesta con una prueba en caso de ser verdadera o con un contraejemplo en caso de ser falsa

    (I) Si A^2 está definida entonces A es necesariamente cuadrada.

    (II) Si AB y BA están definidas entonces A y B son cuadradas.

    (III) Si AB y BA están definidas entonces AB y BA son cuadradas.

    (IV) Si $AB = B$ entonces $A = I$.

27. Demuestre los siguientes enunciados

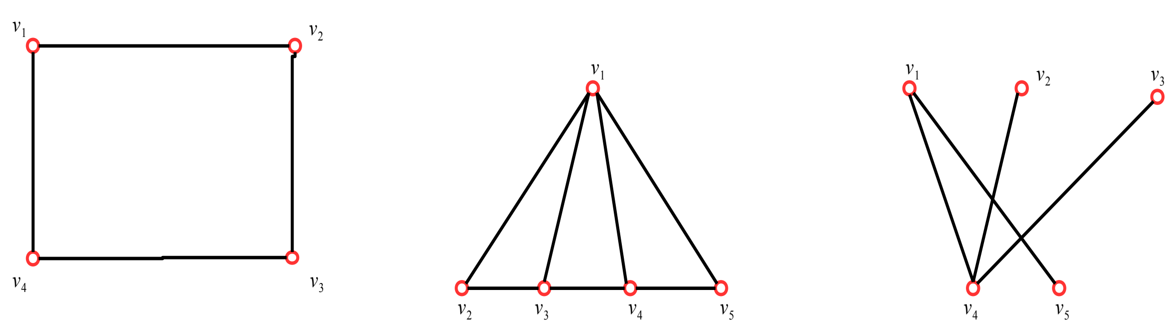
    (I) Si A y B son matrices simétricas, también lo es $A + B$.

    (II) Si A es una matriz simétrica también lo es kA para cualquier escalar $k \in \mathbb{R}$.

28. Demuestre mediante un contraejemplo que el producto de dos matrices simétricas, no necesariamente es simétrico.

Grafos y Digrafos

29. Determine la matriz de adyacencia de los grafos (a), (b) y (c) de la siguiente figura.

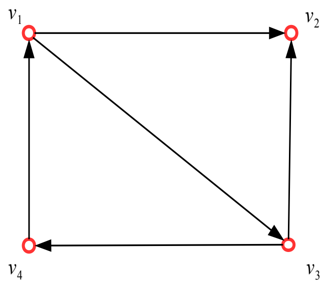


(a) Grafo 1 (b) Grafo 2 (c) Grafo 3

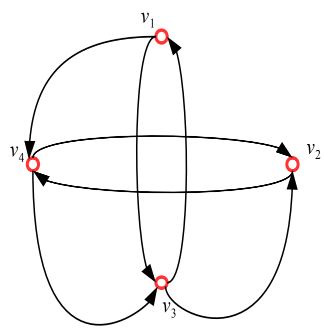
30. Dibuje un grafo que tenga la matriz de adyacencia dada

$$(i)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (ii)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

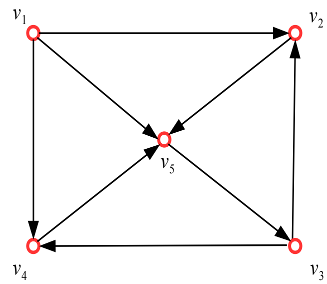
31. Determine la matriz de adyacencia de los digrafos (d) y (e) y (f) de la siguiente figura.



(d) Digrafo 1



(e) Digrafo 2



(f) Digrafo 3

32. Dibuje un digrafo que tenga la matriz de adyacencia dada

$$(i)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (ii)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

33. Utilice potencias de matrices para determinar el número de trayectorias de la longitud especificada entre los vértices dados. **Sugerencia.** Utilice MATLAB para ejecutar sus cálculos de potencias.

    (I) Longitud 2, v_1, v_2, grafo (a) problema 1.

    (II) Longitud 3, v_1, v_3, grafo (c) problema 1.

Matlab

34. Ver videos 1-4 del tutorial de Matlab.

35. Verificar los resultados de los ejercicios 6, 7, 9 en Matlab

36. Genere un vector de 8 componentes con entradas $0, 1, \ldots, 7$, a partir de este construya uno con entradas $0, \pi/4, 2\pi/4, \ldots,$ $7\pi/4$, y encuentre la longitud de este vector.