Álgebra Lineal – Taller No 11

Instrucciones. Recuerde que los ejercicios marcados con * indican un mayor nivel de dificultad que el resto y es importante que el estudiante ataque una razonable cantidad de ellos por sí mismo.

Valores y Vectores Propios

1. Demuestre que $\mathbf{v}$ es un vector propio de A y determine el valor propio asociado

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. Demuestre que λ es un valor propio de A y encuentre un vector propio asociado

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \ \lambda = -2. \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \ \lambda = 3.$$

3. Encuentre geométricamente los valores y vectores propios de la matriz A.

$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ Reflexión en el eje y.

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ Reflexión en la recta $y = x$.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ Proyección sobre el eje x.

$A = \begin{bmatrix} \frac{16}{25} & \frac{12}{25} \\ \frac{12}{25} & \frac{9}{25} \end{bmatrix}$ Proyección sobre $gen\left(\begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}\right)$.

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

Dilata por 2 horizontalmente y por 3 verticalmente.

$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Rotación de $\dfrac{\pi}{2}$ contra las manecillas del reloj.

4. Obtenga bases de todos los espacios propios asociados a cada una de las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}. \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

5.* Sea A una matriz de tamaño 2×2 con vectores propios $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ asociados a $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ y $\lambda_2 = 2$, respectivamente.

   (a) Encuentre una fórmula sencilla para $A^{10}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ con $x, y \in \mathbb{R}$ arbitrarios.

   (b) Encuentre $A^k\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ para cualquier $x, y \in \mathbb{R}$ y cualquier $k \in \mathbb{N}$.

6.* Sea A una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$

   (a) Demuestre que A y A^T tienen el mismo polinomio característico y consecuentemente los mismos valores propios.

   (b) De un ejemplo de una matriz A de tamaño 2×2 para la cual A y A^T tengan distintos espacios propios.

7. Suponga que v es un vector propio de A con valor propios asociado λ. Sea $c \in \mathbb{R}$ un escalar. Demuestre que v es un vector propio de $A - cI$ y encuentre su valor propio asociado.

8.* Sean A y B matrices cuadradas de orden n con valores propios λ y μ respectivamente.

(i) De un ejemplo para demostrar que $\lambda+\mu$ no necesariamente es valor propio de $A+B$.

(ii) De un ejemplo para demostrar que $\lambda\mu$ no necesariamente es valor propio de AB.

(iii) Suponga que existe $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$ no nulo tal que $A\vec{x}=\lambda\vec{x}$ y $B\vec{x}=\mu\vec{x}$. Demuestre que, bajo esta hipótesis adicional $\lambda+\mu$ y $\lambda\mu$ son valores propios de $A+B$ y AB respectivamente.

Semejanza y Diagonalización

9. A continuación se da una diagonalización de la matriz A en la forma $P^{-1}AP=D$. Indique los valores propios de A y las bases para los espacios propios correspondientes

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

10. Determine si A es diagonalizable y, de serlo, encuentre una matriz P invertible y una matriz diagonal D tales que $P^{-1}AP=D$.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}. \qquad A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \qquad A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

11. Utilice diagonalización para calcular la potencia requerida de la matriz

$$\begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{10}. \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{8}.$$

12. Determinar en cada caso si las matrices A y B son semejantes.

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{bmatrix}.$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

13.* ¿Para qué valores de k es la matriz diagonalizable?

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & k \end{bmatrix}. \qquad A=\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

14.* Demuestre que si la matriz A es invertible, entonces AB y BA son semejantes.

15. Demuestre que si A es diagonalizable también lo es A^T.

16.* Demuestre que si A es una matriz diagonalizable tal que sus valores propios son 0 o 1 entonces $A^2=A$, es decir, que A es idempotente.

17.* Sea A una matriz de $n\times n$ y $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$ un vector propio, es decir $A\vec{x}=\lambda\vec{x}$.

(a) Pruebe que si $\lambda=0$ entonces $\vec{x}\in\ker(A)$.

(b) Demuestre que si $\lambda\neq 0$ entonces $\vec{x}\in col(A)$.

Matlab

Haga el ejercicio 4 (a) - (e) del Taller resuelto Matlab 2 en la página del curso (https://ciencias.medellin.unal.edu.co/cursos/algebra-lineal/matlab.html).