Álgebra Lineal – Taller No 12

Instrucciones. Recuerde que los ejercicios marcados con * indican un mayor nivel de dificultad que el resto y es importante que el estudiante ataque una razonable cantidad de ellos por sí mismo.

Ortogonalidad

1. Determine cuales de los siguientes conjuntos de vectores son ortogonales

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. Demuestre que los conjuntos de vectores son una base ortogonal de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$(de acuerdo con la dimensión de los vectores) y posteriormente escriba el vector $\mathbf{w}$ como combinación lineal de la base. **Sugerencia.** Utilice proyecciones ortogonales para evitar cálculos pesados.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

3. Determine si las siguientes son matrices ortogonales, de serlo halle la inversa

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \cos\theta \sin\theta & -\cos\theta & -\sin^2\theta \\ \cos^2\theta & \sin\theta & -\cos\theta\sin\theta \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

4.* Sea Q una matriz ortogonal, demuestre que cualquier matriz obtenida reordenando las filas de Q es también ortogonal.

5. Sea $Q \in M_{n\times n}$ una matriz ortogonal y $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ vectores unitarios de $\mathbb{R}^n$, demuestre que el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es igual al ángulo entre $Q\mathbf{u}$ y $Q\mathbf{v}$, es decir que Q preserva ángulos. **Indicación.** Recuerde que si $\vec{x}, \vec{y}$ son vectores de $\mathbb{R}^n$, entonces $\vec{x}^T\,\vec{y} = \vec{x}\cdot\vec{y}$.

6. Sea A una matriz de tamaño 3×3.

   (i) Si A tiene tres columnas ortogonales, cada una de longitud 4, ¿cuál matriz es A^TA?

   (ii) Si A tiene tres columnas ortogonales, de longitudes $1, 2$ y 3, ¿cuál matriz es A^TA?

7.* De un ejemplo en cada uno de los siguientes casos.

(i) Una matriz A cuyas columnas sean ortonormales pero que $AA^T \neq I$.

(ii) Dos vectores ortogonales de $\mathbb{R}^n$ que no sean linealmente independientes.

8. Sea Q una matriz ortogonal de tamaño $n \times n$. Demuestre que sus filas son una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.

9. Sea $A \in M_{n\times n}$ una matriz simétrica y ortogonal, demuestre que sus valores propios deben ser 1 o -1.

Complementos y Proyecciones Ortogonales

10. Encuentre el complemento ortogonal $W^\perp$ de W y proporcione una base para $W^\perp$

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : 2x - y = 0 \right\} \qquad W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : x + y - z = 0 \right\}$$

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : 3x + y = 0 \right\} \qquad W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : x = t, y = -t, z = 3t \right\}$$

11. Sea W el subespacio generado por los vectores dados. Encuentre una base para el complemento ortogonal $W^\perp$

$$(a)\ \mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix},\ \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (b)\ \mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

12. Encuentre la proyección ortogonal de $\mathbf{v}$ sobre el espacio W generado por los vectores $\mathbf{u}_i$, puede suponer que los vectores $\mathbf{u}_i$ son ortogonales. También encuentre la descomposición ortogonal de $\mathbf{v}$ con respecto a W.

$$(a)\ \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \end{bmatrix},\ \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (b)\ \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},\ \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(c)\ \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},\ \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad (d)\ \mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},\ \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

13. Sea $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x - z + w = 0,\ 2y + z + w = 0 \right\}$.

(a) Encuentre una base ortonormal para W.

(b) Encuentre una base ortonormal para $W^\perp$.

(c) Sea $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Encuentre $\mathrm{proy}_W(\mathbf{v})$ y $\mathrm{proy}_{W^\perp}(\mathbf{v})$.

14. Encontrar una base ortogonal para $\mathbb{R}^4$ que contenga los vectores

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

15. Sea

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Encuentre bases ortogonales para $\text{Col}(E)$, $(\text{Col}(E))^{\perp}$, $\text{Nul}(E)$ y $(\text{Nul}(E))^{\perp}$.

16.* Sea W un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbf{v}$ un vector de $\mathbb{R}^n$. Suponga que $\mathbf{w}$ y $\mathbf{w}'$ son vectores ortogonales, con $\mathbf{w} \in W$ y tales que $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{w}'$. ¿Es necesariamente cierto que $\mathbf{w}'$ está en $W^{\perp}$? Demuéstrelo o provea un contraejemplo.

17.* Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base ortogonal para $\mathbb{R}^n$ y sea $W = gen(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k)$. ¿Es necesariamente cierto que $W^{\perp} = gen(\mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{v}_{k+2}, \ldots, \mathbf{v}_n)$? Demuéstrelo o provea un contraejemplo.