Álgebra Lineal – Taller No 13

Instrucciones. Recuerde que los ejercicios marcados con * indican un mayor nivel de dificultad que el resto y es importante que el estudiante ataque una razonable cantidad de ellos por sí mismo.

Gram-Schmidt

1. Aplique el proceso de Gram-Schmidt para obtener una base ortogonal y luego normalice la base para lograr una base ortonormal

(a) $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(b) $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$.

(c) $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(d) $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$.

2. Encuentre una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que contenga al vector $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$.

3. Encuentre una base ortogonal de $\mathbb{R}^4$ que contenga a los vectores $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

4. Encontrar una base ortonormal para $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \middle| x + 2y + 3z - 4w = 0 \right\}$.

Diagonalización Ortogonal de Matrices Simétricas

5. Diagonalice las siguientes matrices encontrando una matriz Q ortogonal tal que $Q^T AQ$ sea diagonal.

(a) $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$.

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

6. Sean A y B matrices diagonalizables ortogonalmente de tamaño $n \times n$ y $c \in \mathbb{R}$ un escalar. Demuestre que las siguientes matrices son diagonalizables ortogonalmente

(a) $A + B$. (b) cA. (c) A^2.

7. Si A y B son matrices de tamaño $n \times n$ diagonalizables ortogonalmente y $AB = BA$ demuestre que AB es diagonalizable ortogonalmente.

8. Sea A una matriz invertible que adicionalmente es diagonalizable ortogonalmente. Demuestre que A^{-1} es diagonalizable ortogonalmente.

9. Demuestre que si A es diagonalizable ortogonalmente, también lo es A^T.

10. Sea $A \in M_{n\times n}$ una matriz simétrica cuyos valores propios son 1 o -1, demuestre que $A^2 = I$.

Formas Cuadráticas

11. Evalúe la forma cuadrática $f(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$ para las matrices A y los vectores $\vec{x}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \ \vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \ \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \ \vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

12. Encuentre la matriz simétrica asociada a la correspondiente forma cuadrática

(a) $x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_1x_2$. (b) x_1x_2. (c) $x_1^2 - x_3^2 + 8x_1x_2 - 6x_2x_3$.

(d) $3x^2 - 3xy - y^2$. (e) $2x^2 - 3y^2 + z^2 - 4xz$. (f) $5x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

13. Diagonalice las siguientes formas cuadráticas

(a) $2\,x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_1x_2$. (b) $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2$. (c) $2xy + 2xz + 2yz$.

14. Considere las formas cuadráticas

$$\begin{aligned} &(a)\ x_1^2 + 2x_2^2. \\ &(b)\ x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2. \\ &(c)\ x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2. \\ &(d)\ -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3. \end{aligned} \tag{1}$$

Clasifique cada una de las formas cuadráticas en (1) como definida positiva, semidefinida positiva, definida negativa, semidefinida negativa o indefinida.

15. Sea $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$. Sin hacer las multiplicaciones encuentre.

(i) El determinante de A.
(ii) Los valores propios de A.
(iii) Los vectores propios de A.
(iv) Una razón por la cuál A es necesariamente simétrica.

Aplicación – Graficación de Ecuaciones Cuadráricas

16. Identifique la gráfica de la ecuación dada

(i) $x^2 + 5y^2 = 25$.
(ii) $x^2 - y^2 - 4 = 0$.
(iii) $2x^2 + y^2 - 8 = 0$.
(iv) $3x^2 = y^2 - 1$.