Álgebra Lineal – Taller No 4

Instrucciones. Recuerde que los ejercicios marcados con * indican un mayor nivel de dificultad que el resto y es importante que el estudiante ataque una razonable cantidad de ellos por sí mismo.

Conjuntos Generadores

1. En cada uno de los casos, determine si el vector $\mathbf{v}$ es una combinación lineal de los vectores $\mathbf{u}_i$

$$(a)\ \mathbf{v} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} \qquad (b)\ \mathbf{v} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix}2\\-6\end{bmatrix}$$

$$(c)\ \mathbf{v} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} \qquad (d)\ \mathbf{v} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$(e)\ \mathbf{v} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$$

2. En cada uno de los casos, determine si el vector $\mathbf{b}$ está en el conjunto generado por las columnas de la matriz A

$$(a)\ A = \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix} \qquad (b)\ A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix}10\\11\\12\end{bmatrix}$$

3. Demuestre que $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ están en $\text{gen}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$.

4. Demuestre que $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ están en $\text{gen}(\mathbf{u}, \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w})$.

5.* Sean k y ℓ enteros positivos con $k \le \ell$. Sean $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_\ell$ vectores de $\mathbb{R}^n$ y $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$, $T = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_\ell\}$.

   a) Demuestre que $\text{gen}(S) \subseteq \text{gen}(T)$.

   b) Deduzca que si $\mathbb{R}^n = \text{gen}(S)$, entonces $\mathbb{R}^n = \text{gen}(T)$.

6.* Sean $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_\ell, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ vectores de $\mathbb{R}^n$. Suponga que cada $\mathbf{u}_i$ es combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$.

   a) Demuestre que si $\mathbf{w}$ es una combinación lineal de los vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_\ell$, entonces también es una combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$.

   b) Utilice (a) para concluir que $\text{gen}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_\ell) \subseteq \text{gen}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k)$.

Independencia Lineal

7. En cada uno de los casos, determine si los vectores son linealmente independientes. Si la respuesta puede determinarse por simple inspección, justifique su respuesta.

$$a)\ \begin{bmatrix}3\\1\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix} \qquad b)\ \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix} \qquad c)\ \begin{bmatrix}2\\-3\\7\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-5\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\3\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\1\\5\end{bmatrix}$$

d) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ *e)* $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

8. Demuestre que dos vectores son linealmente dependientes si y sólo si uno es múltiplo escalar del otro.

9.* Demuestre que todo subconjunto de un conjunto linealmente independiente es linealmente independiente.

10.* Sean $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ y $\mathbf{w}_3$ vectores linealmente independientes. Demuestre que $\mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_3$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_3$ y $\mathbf{v}_3 = \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2$ son linealmente dependientes.

11. Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \in \mathbb{R}^3$, complete los enunciados.

   a) Estos cuatro vectores son linealmente dependientes pues ...
   b) Los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son linealmente independientes si ...
   c) Los vectores $\mathbf{v}_1$ y $(0, 0, 0)$ son linealmente dependientes pues ...

12.* Encuentre dos vectores linealmente independientes en el plano $x + 2y - 3z = 0$ de $\mathbb{R}^3$. ¿Por qué no pueden hallarse tres vectores linealmente independientes en dicho plano?

13. Los vectores $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ y $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ son combinaciones lineales de los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$. Escriba $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ como combinaciones lineales de $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ y $\mathbf{v} - \mathbf{w}$.

14. Sean $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_6$ seis vectores en $\mathbb{R}^4$. En las oraciones a continuación elija la palabra correcta.

   a) Los vectores (generan)(no generan)(podían generar) $\mathbb{R}^4$.
   b) Los vectores (son)(no son)(podrían ser) linealmente independientes.
   c) Cuatro vectores cualesquiera (son)(no son)(podrían ser) linealmente independientes.

15.* Establezca la verdad o falsedad de los siguientes enunciados probándolos o con un contraejemplo.

   a) Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ un conjunto que contiene mas de tres vectores. Luego S es linealmente dependiente.
   b) Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ un conjunto linealmente dependiente, luego S tiene mas de tres vectores.
   c) Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ un conjunto linealmente independiente, luego S tiene tres vectores.
   d) $\text{gen}(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3$.
   e) $\text{gen}(\mathbb{R}^3 - \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}) \neq \mathbb{R}^3$.
   f) Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ son vectores de $\mathbb{R}^3$, entonces $\text{gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es un plano o todo el espacio.

Determinantes

16. Calcule los determinantes usando la regla de expansión por cofactores.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & \tan\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta & -\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ a & 0 & b \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & c \\ 0 & d & e & f \\ g & h & i & j \end{vmatrix}$$

17. Utilice las propiedades de los determinantes para evaluar eficientemente los siguientes determinantes

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

18. Suponga que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4$. Calcule los siguientes determinantes

$$\begin{vmatrix} 3a & -b & 2c \\ 3d & -e & 2f \\ 3g & -h & 2i \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2c & b & a \\ 2f & e & d \\ 2i & h & g \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d-3g & 2e-3h & 2f-3i \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

19. Suponga que A y B son matrices de $n \times n$ tales que $\det(A) = 3$ y $\det(B) = -2$. Encuentre los siguientes determinantes

$$\det(AB) \qquad \det(4A) \qquad \det(AA^T)$$

20. Establezca si los enunciados son verdaderos o falsos. De las demostraciones o provea contraejemplos

(i) El determinante de $I + A$ es $1 + \det(A)$.
(ii) El determinante de ABC es $|A|\,|B|\,|C|$.
(iii) El determinante de $4A$ es $4|A|$.
(iv) El determinante de $AB - BA$ es cero.

Matlab

21. Verificar los resultados de los ejercicios 1, 2 en Matlab.

22. Ver videos 8-9 del tutorial de Matlab.

23. Ejecute en Matlab

(a)
```
>> A = [1 1; 1 2]
>> b = [3; 4]
>> linsolve(A,b)  % resuelve el sistema
>> rref ([A b])
>> inv(A)*b
>> A=[A [-2 3]']
>> linsolve(A,b)
>> rref ([A b])
```

24. Encuentre la solución del sistema usando Matlab

$$(a)\quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 9 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned} \qquad (b)\quad \begin{aligned} x_1 - 3x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$(c)\quad \begin{aligned} 3w + 3x + y &= 1 \\ 2w + x + y + z &= 1 \\ 2w + 3x + y - z &= 2 \end{aligned} \qquad (d)\quad \begin{aligned} 2r + s &= 3 \\ 4r + s &= 7 \\ 2r + 5s &= -1 \end{aligned}$$

25. Determine usando Matlab si los vectores son L.I.

(a) $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$