Álgebra Lineal – Taller No 5

Instrucciones. Recuerde que los ejercicios marcados con * indican un mayor nivel de dificultad que el resto y es importante que el estudiante ataque una razonable cantidad de ellos por sí mismo.

Matriz Inversa

1. Encuentre todos los valores de k para los cuales A no es invertible.

$$A = \begin{bmatrix} k & -k & 3 \\ 0 & k+1 & 1 \\ k & -8 & k-1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} k & k & 0 \\ k^2 & 4 & k^2 \\ 0 & k & k \end{bmatrix}$$

2. Encuentre la inversa de la matriz dada (si existe)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{2}{4} & \frac{3}{5} \\ \frac{5}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

3. Demuestre que si A y B son invertibles y α es un escalar no nulo se cumplen las siguientes propiedades
   (i) $(A^{-1})^{-1} = A$.
   (ii) $(\alpha A)^{-1} = \dfrac{1}{\alpha} A^{-1}$.
   (iii) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
   (iv) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.
   (v) $(A^{-1})^n = (A^n)^{-1}$, con $n \in \mathbb{N}$ arbitrario.
4. De un ejemplo de dos matrices invertibles A y B tales que $(AB)^{-1} \neq A^{-1}B^{-1}$.
5. Dadas dos matrices invertibles A y B ¿Es cierto que $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$?
6. Resuelva la ecuación matricial dada para X.
   (i) $XA^{-1} = A^3$.
   (ii) $(A^{-1}X)^{-1} = (AB^{-1})^{-1}(AB^2)$.
   (iii) $ABXA^{-1}B^{-1} = I + A$.
7. (i) Demuestre que si A es invertible y $AB = 0$ entonces $B = 0$.
   (ii) Provea un contraejemplo para demostrar que el literal anterior puede no cumplirse si se omite la hipótesis de que A sea invertible.
   (iii) Demuestre que si A es invertible y $BA = CA$ entonces $B = C$.
   (iv) Provea un contraejemplo para demostrar que el literal anterior puede no cumplirse si se omite la hipótesis de que A sea invertible.
8.* Demuestre que si una matriz $A \in M_{n\times n}$ satisface la ecuación $A^2 - 2A + I = 0$ entonces es invertible.
9. Demuestre que si una matriz simétrica es invertible entonces su inversa es también simétrica.
10. Pruebe que una matriz con una columna de ceros no puede tener inversa.

Subespacios de $\mathbb{R}^n$

11. En los siguientes ejercicios sea S la colección de vectores $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ que satisfacen la propiedad mencionada. En cada caso, demuestre que S forma un subespacio de $\mathbb{R}^2$ u ofrezca un contraejemplo para demostrar que no lo hace

(a) $x = 0$ $\qquad$ (b) $x \geq 0,\ y \geq 0$ $\qquad$ (c) $y = 2x$ $\qquad$ (d) $xy \geq 0.$

12. En los siguientes ejercicios sea S la colección de vectores $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ que satisfacen la propiedad mencionada. En cada caso, demuestre que S forma un subespacio de $\mathbb{R}^3$ u ofrezca un contraejemplo para demostrar que no lo hace

(a) $x = y = z$ $\qquad$ (b) $z = 2x,\ y = 0$ $\qquad$ (c) $x - y + z = 1$ $\qquad$ (d) $|x - y| = |y - z|.$

13. Suponga que S es el conjunto de $\mathbb{R}^2$ que consiste de la unión de los ejes x y y ¿Es S un subespacio de $\mathbb{R}^2$?, ¿por qué si o por qué no?

14. Determine si los siguientes conjuntos son subespacios o no del correspondiente $\mathbb{R}^n$. Cuando no lo sea, explique cuál condición de la definición de subespacio falla.

$$(a)\ \left\{ \begin{bmatrix} b-c \\ a+b \\ a+b+2c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, a,b,c \in \mathbb{R} \right\} \quad (b)\ \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x+y-2z \geq 0 \right\} \quad (c)\ \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, y = 3x \right\}$$

15. Determine si $\mathbf{b}$ está en $col(A)$ y si $\mathbf{w}$ está en $ren(A)$ y si $\mathbf{v}$ está en $\ker(A) = nul(A)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & -5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Matlab

16. Ejecute en Matlab

(a)
```
>> G=[[2 -3 7 4]' [3 2 1 5]' [4 7 -5 6]'
                                  [4 6 3 -2]']
>> [H,p] = rref(G)
>> G(:,p)
>> H(1:rank(H),:)
```

(b)
```
>> D=[[1 0 0 0]',[0 1 0 0]',[2 3 0 0]',[3 1 0 0]']
>> E = null(D)  % base ortogonal del espacio nulo
>> E'*E
>> F = null(D,'r')  % base racional (aprox) pero
                                        %  no ortogonal
```

17. Determinar los espacios columna, fila y nulo para A y A^T en cada uno de los casos, usando Matlab.

(a)
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

(b)
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 6 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$