Álgebra Lineal – Taller No 6

Instrucciones. Recuerde que los ejercicios marcados con * indican un mayor nivel de dificultad que el resto y es importante que el estudiante ataque una razonable cantidad de ellos por sí mismo.

Bases y Dimensión en $\mathbb{R}^n$

1. Para cada una de las siguientes matrices determine bases para $ren(A)$, $col(A)$, $nul(A)$, $ren(A^T)$ y $col(A^T)$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. Encuentre una base para el subespacio generado de los vectores dados

$$(a) \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \qquad (b) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

3. Suponga que A es una matriz de tamaño 3×5.
   (I) Explique por qué las columnas de A deben ser linealmente dependientes.
   (II) ¿Cuáles son los valores posibles de la nulidad de A?

4. Suponga que A es una matriz de tamaño 4×2.
   (I) Explique por qué las filas de A deben ser linealmente dependientes.
   (II) ¿Cuáles son los valores posibles de la nulidad de A?

5. Responda si los siguientes conjuntos de vectores forman una base para el $\mathbb{R}^n$ correspondiente.

$$(a) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (b) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (c) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

6. Describa si el subespacio en $\mathbb{R}^3$ generado por los siguientes conjuntos es una recta, un plano o todo $\mathbb{R}^3$.
   (I) Los vectores $(1, 1, -1)$ y $(-1, -1, 1)$.
   (II) Los vectores $(0, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$ y $(0, 0, 0)$.
   (III) Las columnas de una matriz escalonada de 3×5 con dos pivotes.

7. Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_6$ vectores en $\mathbb{R}^6$. Elija el concepto correcto
   a) Estos vectores (son)(no son)(podrían ser) linealmente independientes.
   b) Estos vectores (generan)(no generan)(podrían generar) $\mathbb{R}^6$.
   c) Cuatro vectores cualesquiera de los seis iniciales (son)(no son)(podrían ser) una base de $\mathbb{R}^6$.

Los Cuatro Subespacios Fundamentales

Se recuerda que los cuatro subespacios fundamentales asociados a una matriz A de tamaño $n \times k$ vienen dados por $col(A) \subseteq \mathbb{R}^n$, $ren(A) = col(A^T) \subseteq \mathbb{R}^k$, $nul(A) \subseteq \mathbb{R}^k$ y $nul(A^T) \subseteq \mathbb{R}^n$. También mantenga presentes las relaciones de sus dimensiones mediante el teorema del rango.

8. (I) Si una matriz de 7×9 tiene rango 5, ¿cuáles son las dimensiones de los cuatro subespacios fundamentales?
   (II) Si una matriz de 3×4 tiene rango 3, ¿ cuáles son las dimensiones de $col(A)$ y $nul(A^T)$?

9. Considere los siguientes subespacios

$$V = gen\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\},\ W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : \begin{array}{c} 2x+y=0, \\ x+y-z=0 \end{array} \right\},\ Z = \left\{ \begin{bmatrix} 2a+3b \\ a-2c \\ -b+c \end{bmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$$

   a) Encuentre una matriz A cuyo espacio de renglones (o filas) sea V.
   b) Encuentre una matriz B cuyo espacio nulo sea W.
   c) Encuentre una matriz C cuyo espacio de renglones (o filas) sea Z.
   d)* Encuentre una matriz D cuyo espacio nulo sea V.
   e)* Encuentre una matriz E cuyo espacio de renglones (o filas) W.
   f)* Encuentre una base para $V \cup Z$

10. Sin utilizar eliminación encuentre bases para los cuatro espacios fundamentales de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Transformaciones Lineales

11. Sea $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación matricial correspondiente a $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, encuentre $T_A(\mathbf{u})$ y $T_A(\mathbf{v})$ donde $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$.

12. Sea $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la transformación matricial correspondiente a $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, encuentre $T_A(\mathbf{u})$ y $T_A(\mathbf{v})$ donde $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$.

13. Demuestre que las siguientes son transformaciones lineales. Posteriormente calcule la matriz estándar de la transformación.

$$(a)\ T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix} \qquad (b)\ T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y \\ -x \\ 3x-7y \end{bmatrix}$$

$$(c)\ T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y+z \\ 2x+y-3z \end{bmatrix} \qquad (d)\ T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x+y \\ x+y+z \end{bmatrix}$$

14. En cada uno de los siguientes casos, provea un contraejemplo para probar que las transformaciones no son lineales

$$(a)\ T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x^2 \end{bmatrix} \qquad (b)\ T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |x| \\ |y| \end{bmatrix}$$

$$(c)\ T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xy \\ x+y \end{bmatrix} \qquad (d)\ T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+1 \\ y+1 \end{bmatrix}$$

15. En los siguientes ejercicios demuestre que la transformación dada de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ es una transformación lineal, al demostrar que se trata de una transformación matricial.

   (I) F refleja un vector a través del eje y.
   (II) R rota un vector 45^0 en sentido contrario al de las manecillas del reloj en torno al origen.
   (III) R rota un vector 30^0 en el sentido de las manecillas del reloj en torno al origen.
   (IV) D estira un vector por un factor de 2 en la componente x y por un factor de 3 en la componente y.
   (V) P proyecta un vector sobre la recta $y = x$.

(VI) P proyecta un vector sobre la recta $y = 2x$.

(VII) P proyecta un vector sobre la recta $y = -x$.

16. Sea $k > 0$, considere las siguientes matrices elementales

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$$

Cada una de estas matrices corresponde a una transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$. Realice dibujos para ilustrar el efecto que cada transformación tiene sobre el cuadrado unitario con vértices en $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ y $(1,1)$.

Matlab

17. Se definen las matrices `A,B` y los vectores `v,w` en Matlab y luego se ejecutan los siguientes comandos

```
>> A'*v; A'*w;   % Verificación de tamaño
>> size(A)
ans = 10   5
>> rank(A)
ans = 5
>> rank(rref([A v]))
ans = 5
>> size(null(B'))
ans = 9    5
>> size(null(B))
ans =  6   2
>> C=[A zeros(10,18)];
```

Responda las siguientes preguntas con respecto a estas matrices y vectores definidas en Matlab:

(a) $v \in \mathrm{Col}(A)$? (si), (no), (no se puede decidir)

(b) $w \in \mathrm{Nul}(A^T)$? (si), (no), (no se puede decidir)

(c) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{Nul}(A)$? (si), (no), (no se puede decidir)

(d) $\dim(\mathrm{Ren}(B)) =$

(e) $\dim(\mathrm{Nul}(B^T)) =$

(f) $\dim(\mathrm{Nul}(C)) =$