Álgebra Lineal – Taller No 7

Instrucciones. Recuerde que los ejercicios marcados con * indican un mayor nivel de dificultad que el resto y es importante que el estudiante ataque una razonable cantidad de ellos por sí mismo.

Composición e inversas de transformaciones Lineales

1. Demuestre que las siguientes son transformaciones lineales. Posteriormente calcule la matriz estándar de la transformación y si posible escriba la inversa de la transformacion lineal.

$$(a)\ T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix}, \qquad (b)\ T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y \\ -x \\ 3x-7y \end{bmatrix}.$$

$$(c)\ T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y+z \\ 2x+y-3z \end{bmatrix}, \qquad (d)\ T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x+y \\ x+y+z \end{bmatrix}.$$

2. En los siguientes ejercicios encuentre la composición $S \circ T$ primero mediante sustitución directa y posteriormente mediante multiplicación matricial.

$$(a)\ T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y \\ x+y \end{bmatrix}, \qquad S\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ -y \end{bmatrix}.$$

$$(b)\ T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}, \qquad S\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+3y \\ 2x+y \\ x-y \end{bmatrix}.$$

$$(c)\ T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1+x_2-x_3 \\ 2x_1-x_2+x_3 \end{bmatrix}, \qquad S\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4y_1-2y_2 \\ -y_1+y_2 \end{bmatrix}.$$

3. Encuentre la matriz estándar de la transformación compuesta $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ descrita en los siguientes numerales.
   (I) Rotación de 60^0 en sentido contrario al de las manecillas del reloj seguida por reflexión a través de la recta $y = x$.
   (II) Reflexión a través del eje y seguida por una rotación de 30^0 en el sentido de las manecillas del reloj.
   (III) Rotación de 45^0 en el sentido de las manecillas del reloj, seguida por proyección sobre el eje y seguida por rotación de 45^0 en el sentido de las manecillas del reloj.
   (IV) Reflexión a través del eje $y = x$, seguida por una rotación de 30^0 en sentido contrario al de las manecillas del reloj, seguida por reflexión a través de la recta $y = -x$.

4. Suponga que $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ denota la transformación lineal de rotación por un ángulo θ en el sentido de las manecillas del reloj. Dados dos ángulos α, β, demuestre que $R_{\alpha+\beta} = R_\alpha \circ R_\beta$.

5. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(v_1, v_2, v_3) = (v_2, v_3, v_1)$.
   a) ¿Cuál es la transformación $T(T(\mathbf{v}))$?
   b) ¿Cuál es la transformación $T^3(\mathbf{v})$?
   c) ¿Cuál es la transformación $T^{100}(\mathbf{v})$?

6. Suponga que $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal tal que $T(1,1) = (2,2)$ y $T(2,0) = (0,0)$. Encuentre $T(\mathbf{v})$ para los siguientes vectores

$$(a)\ \mathbf{v} = (2,2) \qquad (b)\ \mathbf{v} = (3,1) \qquad (c)\ \mathbf{v} = (-1,1) \qquad (d)\ \mathbf{v} = (a,b)$$

7. * Sea $\mathbf{u}$ un vector en $\mathbb{R}^n$. Demuestre que la proyección de $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ sobre $\mathbf{u}$ es

$$\mathrm{proy}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \frac{1}{\mathbf{u}^T\mathbf{u}}(\mathbf{u}\,\mathbf{u}^T)\mathbf{v} \quad \text{para todo } \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$$

y de esto obtenga la matriz de la transformación lineal $T(\mathbf{v}) = \mathrm{proy}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})$.

Espacios Vectoriales

8. Establezca si los siguientes son espacios vectoriales

   (i) El conjunto de todos los vectores $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ con $x, y \geq 0$.

   (ii) El conjunto de todos los vectores $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ con $x\,y \geq 0$. Esta es la unión del primer y tercer cuadrante.

   (iii) El conjunto de todos los vectores $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ con $x \geq y$.

   (iv) El conjunto de todos los números racionales con la suma y multiplicación usuales.

   (v) El conjunto de todas las matrices triangulares superiores.

   (vi) El conjunto de todas las matrices de 2×2 de la forma $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, tales que $ad = 0$.

   (vii) El conjunto de todas las matrices antisimétricas de $n \times n$.

9. Determine si W es un subespacio de V.

   (a) $V = \mathbb{R}^3, W = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ a \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$

   (b) $V = \mathbb{R}^3, W = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ -a \\ 2a \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$

   (c) $V = \mathbb{R}^3, W = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ a+b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$

   (d) $V = \mathbb{R}^3, W = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ |a| \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$

   (f) $V = M_{2\times 2}, W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & 2a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$

   (e) $V = M_{2\times 2}, W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : ad \geq bc \right\}$

   (g) $V = M_{n\times n}, W =$ matrices diagonales de $n \times n$

   (h) $V = M_{n\times n}, W = \left\{ A \in M_{n\times n} : A^2 = A \right\}$

10. Sea B una matriz fija de $n \times n$ y considere el conjunto $W = \{A \in M_{n\times n} : AB = BA\}$. ¿Es W un subespacio de $M_{n\times n}$?

11. Determine si W es subespacio de V.

    (a) $V = \mathcal{P}_2, W = \{bx + cx^2 : b, c \in \mathbb{R}\}$

    (b) $V = \mathcal{P}_2, W = \{a + bx + cx^2 : a + b + c = 0\}$

    (c) $V = \mathcal{P}_2, W = \{a + bx + cx^2 : abc = 0\}$

    (d) $V = \mathcal{P}_3, W = \mathcal{P}_2$

    (e) $V = \mathcal{P}, W = \mathcal{P}_3$

    (f) $V = \mathcal{P}_{n+k}, W = \mathcal{P}_k$

    (g) $V = \mathcal{F}, W = \{f \in \mathcal{F} : f(-x) = f(x)\}$

    (h) $V = \mathcal{F}, W = \{f \in \mathcal{F} : f(-x) = -f(x)\}\}$

    (i) $V = \mathcal{F}, W = \{f \in \mathcal{F} : f(0) = 1\}$

    (j) $V = \mathcal{F}, W = \{f \in \mathcal{F} : f(0) = 0\}$

12. Sea V un espacio vectorial con subespacios U y W

    (i) Demuestre que $U \cap W$ es un subespacio.

    (ii) Provea un contraejemplo con $V = \mathbb{R}^2$ para ilustrar que no necesariamente se cumple que $U \cup W$ es un subespacio.

    (iii) ¿Bajo qué condiciones sobre U y W se tiene que $U \cup W$ es un subespacio?

13.* Sea V un espacio vectorial con subespacios U y W, defina la **suma** de U y W como el conjunto

$$U + W = \{\mathbf{u} + \mathbf{w} : \mathbf{u} \in U,\ \mathbf{w} \in W\}$$

    (i) Suponga que $V = \mathbb{R}^3$, que U es el eje x y que W es el eje Y. ¿Qué es $U + W$?

    (ii) Si U y W son subespacios de V demuestre que $U + W$ es un subespacio de V.

14. ¿Es $M_{2\times 2}$ generado por el siguiente conjunto?

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

15. ¿Es $\mathcal{P}_2$ generado por $1 + x$, $x + x^2$ y $1 + x^2$?

16. Sean $f(x) = \sin^2(x)$ y $g(x) = \cos^2(x)$

    (I) Demuestre que las funciones constantes pertenecen a $gen(f, g)$.

    (II) Demuestre que la función $\cos(2x)$ pertenece a $gen(f, g)$.

    Indicación. Mantenga presentes las identidades trigonométricas.

Matlab

Haga los ejercicios 1-3 del Taller resuelto Matlab 2 en la página del curso.