Álgebra Lineal – Taller No 8

Instrucciones. Recuerde que los ejercicios marcados con * indican un mayor nivel de dificultad que el resto y es importante que el estudiante ataque una razonable cantidad de ellos por sí mismo.

Para este taller es útil recordar las siguientes definiciones:

- $M_{n\times n}$ denota el espacio vectorial de las matrices de tamaño $n \times n$ con entradas reales.
- $\mathcal{P}_n$ denota el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual a n.
- $\mathcal{F}$ denota el espacio vectorial de todas las funciones de la forma $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es decir, funciones con valores reales definidas sobre la recta de los números reales.

Espacios Vectoriales (Independencia lineal, bases y dimensión)

1. Determine si cada uno de los siguientes conjuntos de matrices en $M_{2\times 2}$ es linealmente independiente. En caso de ser linealmente dependiente, exprese una matriz como combinación lineal de las otras.

   (I) $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\right\}$.

   (II) $\left\{\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\right\}$.

   (III) $\left\{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}\right\}$.

   (IV) $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$.

2. Determine si cada uno de los siguientes conjuntos de polinomios en $\mathcal{P}_3$ es linealmente independiente. En caso de ser linealmente dependiente, exprese un polinomio como combinación lineal de los otros.

   (I) $\{1 + x, 1 + x^2, 1 - x + x^2\}$.

   (II) $\{x, 2x - x^2, 3x + 2x^2\}$.

   (III) $\{2x, x - x^2, 1 + x^3, 2 - x^2 + x^3\}$.

   (IV) $\{1 - 2x, 3x + x^2 - x^3, 1 + x^2 + 2x^3, 3 + 2x + 3x^3\}$.

3. Determine si cada uno de los siguientes conjuntos de funciones en $\mathcal{F}$ es linealmente independiente. En caso de ser linealmente dependiente, exprese una matriz como combinación lineal de las otras.

   (I) $\{1, e^x, e^{2x}\}$.

   (II) $\{1, \operatorname{sen} x, \operatorname{sen}(2x))\}$.

   (III) $\{1, \operatorname{sen}^2 x, \operatorname{sen}(2x)\}$.

   (IV) $\{1, \operatorname{sen}^2 x, \cos(2x)\}$.

   (V) $\{1, x, e^x, xe^x\}$.

4. Encuentre una base para los siguientes subespacios del espacio vectorial dado.

   (I) $V_1 = \{A \in M_{3\times 3} \mid A \text{ es diagonal}\}$.

   (II) $V_2 = \{A \in M_{3\times 3} \mid A \text{ es simétrica}\}$.

   (III) $V_3 = \{A \in M_{4\times 4} \mid A \text{ es anti-simétrica}\}$.

   (IV) $V_4 = \{A \in M_{3\times 3} \mid A \text{ es triangular superior}\}$.

   (V) $V_5 = \mathcal{P}_2$.

   (VI) $V_6 = \{p(x) \in \mathcal{P}_3 : p(0) = 0\}$.

   (VII) $V_7 = \{A \in M_{2\times 2} : \operatorname{tr}(A) = 0\}$.

   (VIII) $V_8 = \left\{ p(x) \in \mathcal{P}_3 : \begin{array}{l} p'''(0) + 2p'(0) + p(0) = 0, \\ 2p'''(0) + p''(0) + p'(0) + 2p(0) = 0 \end{array} \right\}$.

5. Determine el vector de coordenadas del vector v con respecto a la base $\mathcal{B}$ en cada uno de los casos.

   (I) $v = 1 + 2x + 3x^2$ y $\mathcal{B} = \{1 + x, 1 - x, x^2\}$.

   (II) $v = 2 - x + 3x^2$ y $\mathcal{B} = \{1, 1 + x, -1 + x^2\}$.

   (III) $v = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ y $\mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right\}$.

6. Para cada uno de los siguientes espacios vectoriales V determine su dimensión y encuentre una base.

   (I) $V = \{p(x) \in \mathcal{P}_2 \mid p(0) = 0\}$.

   (II) $V = \{p(x) \in \mathcal{P}_2 \mid p(1) = 0\}$.

   (III) $V = \{p(x) \in \mathcal{P}_2 \mid xp'(x) = p(x)\}$.

   (IV) $V = \{A \in M_{2\times 2} \mid A \text{ es triangular superior}\}$. Repita para el mismo subespacio de $M_{3\times 3}$.

   (V) $V = \{A \in M_{2\times 2} \mid A \text{ es antisimétrica}\}$. Repita para el mismo subespacio de $M_{3\times 3}$.

7. Para cada uno de los siguientes subconjuntos del espacio vectorial indicado, extiéndalo a una base para el espacio.

   (I) Extienda $\{1+x, 1+x+x^2\}$ en $\mathcal{P}_2$.

   (II) Extienda $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ en $M_{2\times 2}$.

   (III) Extienda $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ en $M_{2\times 2}$.

   (IV) Extienda $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ en el espacio matrices simétricas 2×2.

8. Sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base para un espacio vectorial V. Pruebe que $\{v_1, v_1+v_2, v_1+v_2+v_3, \ldots, v_1+v_2+\cdots+v_n\}$ también es una base para V.

9.* Sean U y W subespacios de un espacio vectorial V de dimensión finita. Pruebe que

$$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

Sugerencia: Sea $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ una base para $U \cap W$. Extienda $\mathcal{B}$ a una base $\mathcal{C} = \{u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_r\}$ de U y a una base $\mathcal{D}\{u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_s\}$ de W y pruebe que $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ es una base para $U+W$.

Transformaciones Lineales

10. Sea $T : V \to V$ una transformación lineal y $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ una base de V. Demuestre que si $T\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i$ para todo $1 \leq i \leq n$ entonces T es la transformación identidad en V.

11. Defina las transformaciones lineales $S : \mathbb{R}^2 \to M_{2\times 2}$ y $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mediante

$$S \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{bmatrix}, \qquad T \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c+d \\ -d \end{bmatrix}.$$

Calcule $S \circ T \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $S \circ T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. ¿Se puede calcular $T \circ S$? De ser asi, hágalo.

12. Defina las transformaciones lineales $S : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$ y $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_1$ mediante $S(a+bx) = a + (a+b)x + 2bx^2$ y $T(a+bx+cx^2) = b + 2cx$. Calcule $(S \circ T)(3+2x-x^2)$ y $(S \circ T)(a+bx+cx^2)$. ¿Se puede calcular $T \circ S$? De ser asi, hágalo.

13. Definamos $R : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_3$ por

$$R(p(x)) = x^2 p'(x).$$

Demostrar que R es una transformación lineal.

14. Sea $T : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$T(a+bx+cx^2) = \begin{bmatrix} a \\ a+b \\ a+b+c \end{bmatrix}.$$

Sea $S : \mathbb{R}^3 \to M_{2\times 2}$ la transformación lineal definida por

$$S\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x+2y & z \\ x-z & y+z \end{bmatrix}.$$

Calcular $T \circ S$ y $S \circ T$ si es que estas transformaciones están definidas.

Matlab

Haga los ejercicios 1-2 del Taller resuelto Matlab 3 en la página del curso (https://ciencias.medellin.unal.edu.co/cursos/algebra-lineal/matlab.html).