Álgebra Lineal – Taller No 9

Instrucciones. Recuerde que los ejercicios marcados con * indican un mayor nivel de dificultad que el resto y es importante que el estudiante ataque una razonable cantidad de ellos por sí mismo.

Para este taller es útil recordar las siguientes definiciones: supoganmos que $T : V \to W$ es una transformación lineal entre espacios vectoriales, entonces:

- Núcleo$(T) = Ker(T) = \{x \in V \mid T(x) = 0\}$.
- $Im(T) = \{T(v) \in W \mid v \in V\}$.
- $Nulidad(T) = dim($Núcleo$(T))$.
- $Rango(T) = dim(Im(T))$.

Transformaciones Lineales (Núcleo e Imagen)

1. Sea $T : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ la transformación lineal definida por $T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$. Considere las siguientes matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

   (I) ¿Cuáles de las matrices (1) están en Núcleo(T)?
   (II) ¿Cuáles de las matrices (1), de haber alguna, están en la imagen de T?
   (III) Describa como conjuntos generados a $Im(T)$ y Núcleo(T).
   (IV) Calcular la nulidad y el rango de T.

2. Sea $T : M_{2\times 2} \to \mathbb{R}$ la transformación lineal definida por $T(A) = tr(A)$. Considere las siguientes matrices

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

   (I) ¿Cuáles de las matrices (2) están en Núcleo(T)?
   (II) ¿Cuáles de los siguientes escalares están en $Im(T)$?

$$0, \qquad 5, \qquad -\sqrt{2}.$$

   (III) Describa como conjuntos generados a $Im(T)$ y Núcleo(T).
   (IV) Calcular la nulidad y el rango de T.

3. Sea $T : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por

$$T(a + bx + cx^2) = \begin{bmatrix} a - b \\ b + c \end{bmatrix}.$$

   (I) ¿Cuáles de los siguientes vectores están en la imagen de T?

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   (II) ¿Cuáles de los siguientes polinomios están en el núcleo de T?

$$1 + x, \qquad x - x^2, \qquad 1 + x - x^2.$$

   (III) Describa como conjuntos generados a $Im(T)$ y Núcleo(T).
   (IV) Calcular la nulidad y el rango de T.

4. Sea $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$, definida por $T(p(x)) = xp'(x)$ y considere los polinomios

$$2, \qquad x^2, \qquad 1 - x. \tag{3}$$

(I) ¿Cuáles de los polinomios (3) pertenecen al núcleo de T?
(II) ¿Cuáles de los polinomios (3) pertenecen a la imagen de T?
(III) Describa como conjuntos generados a $Im(T)$ y Núcleo(T).
(IV) Calcular la nulidad y el rango de T.

5.* Sea $T : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ definida por $T(M) = AM$, donde $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$. Demuestre que $T(M_{2\times 2}) = M_{2\times 2}$ y que Núcleo$(T) = \{0\}$, es decir:

(I) $AM = B$ tiene solución para todo $B \in M_{2\times 2}$.
(II) $AM = 0$ si y solo si M es la matriz nula en todas sus entradas.

6.* Sea $T : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ definida por $T(M) = AM$, donde $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.

(I) Demuestre que la matriz identidad I no pertenece a la imagen de T. Es decir, no existe solución a la ecuación matricial $AM = I$.
(II) Encuentre una matriz M no nula tal que $AM = 0$, es decir, $M \in$ Núcleo(T).

7.* Suponga que la transformación $T : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ es lineal. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

(I) T^2 es la transformación identidad.
(II) Núcleo$(T) = 0$.
(III) $T(M_{2\times 2}) = M_{2\times 2}$.
(IV) $T(M) = -M$ no es posible.

8.* Sea $\theta \in (0, 2\pi)$ un ángulo cualquiera y defina las matrices

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Considere las transformaciones lineales $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definidas por $S\mathbf{u} = A\mathbf{u}$ y $T\mathbf{v} = B\mathbf{v}$.

(I) Utilice conceptos para describir el efecto que las transformaciones S y T tienen sobre un vector cualquiera $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ repectivamente.
(II) Demuestre que no existe $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ no nulo, tal que $S\mathbf{u} = \mathbf{u}$.
(III) Demuestre que existe $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ tal que $T\mathbf{v} = \mathbf{v}$.

Transformaciones Lineales (Inyectividad y Sobreyectividad)

9. En los siguientes ejercicios determine si la transformación lineal T es inyectiva y si es sobreyectiva. **Indicación.** Mantenga presente el teorema del rango.

(I) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida mediante $T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - y \\ x + 2y \end{bmatrix}$.
(II) $T : \mathcal{P}_2 \to M_{2\times 2}$ definida mediante

$$T(a + bx + cx^2) = \begin{bmatrix} a + b & a + 2c \\ 2a + c & b - c \end{bmatrix}.$$

(III) $T : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ definida mediante

$$T(a + bx + cx^2) = \begin{bmatrix} 2a - b \\ a + b - 3c \\ c - a \end{bmatrix}.$$

(IV) $T : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^2$, definida mediante $T(p(x)) = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \end{bmatrix}$.

(V) $T : \mathbb{R}^3 \to M_{2\times 2}$ definida mediante

$$T \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-b & b-c \\ a+b & b+c \end{bmatrix}.$$

(VI) $T : \mathbb{R}_3 \to W$ definida mediante

$$T \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b+c & b-2c \\ b-2c & a-c \end{bmatrix}.$$

Donde W es el subespacio de todas las matrices simétricas de $M_{2\times 2}$.

10. Determine si los siguientes espacios V y W son isomorfos. **Indicación.** Mantenga presente el teorema de la dimensión.

(I) V es el espacio de las matrices diagonales de $M_{3\times 3}$ y $W = \mathbb{R}^3$.

(II) V es el espacio de las matrices simétricas de $M_{3\times 3}$ y W es el espacio de las matrices triangulares superiores de $M_{3\times 3}$.

(III) $V = \mathcal{P}_2$ y $W = \{p(x) \in \mathcal{P}_3 : p(0) = 0\}$.

(IV) $V = \{A \in M_{2\times 2} : tr(A) = 0\}$, $W = \mathbb{R}^2$.

(V) $V = \{A \in M_{2\times 2} : tr(A) = 0\}$, $W = \mathbb{R}^3$.

11.* Demuestre que las siguientes transformaciones lineales $T : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ son isomorfismos.

(I) $T(p(x)) = p(x) + p'(x)$.

(II) $T(p(x)) = p(x-2)$.

(III) $T(P(x)) = x^n p\left(\frac{1}{x}\right)$.

12.* Sean $S : V \to W$ y $T : U \to V$ transformaciones lineales

(I) Demuestre que si S y T son inyectivas, también lo es $S \circ T$.

(II) Demuestre que si S y T son sobreyectivas, también lo es $S \circ T$.

Matlab

Repaso: Haga los ejercicios 4-5 del Taller resuelto Matlab 1 en la página del curso.