



# SERIES TIEMPO DE MEMORIA LARGA, IDENTIFICACIÓN Y APLICACIONES

Elkin Castaño V.

Escuela de Estadística, Facultad de Ciencias  
Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín

# Contenido

- Introducción
- El modelo ARFIMA
- Metodología de identificación
- Experimentos Monte Carlo
- Aplicaciones
- Conclusiones

# Introducción

- La evidencia empírica sobre series de tiempo con memoria larga se remonta mucho tiempo atrás. Quizás el ejemplo más conocido sea el trabajo de Hurst (1951), en el campo de la hidrología.
- Beran (1992) señala que se ha encontrado evidencia de memoria larga en series de tiempo de otras ciencias como tales Economía, Finanzas, Astronomía, Agricultura, Química, Meteorología, Medio Ambiente, Biología, Telecomunicaciones y Geología.
- La memoria larga en una serie se caracteriza por una fuerte relación de dependencia con sus términos del pasado lejano.

- La memoria de una serie de tiempo está relacionada con el comportamiento que exhibe su función de autocorrelación.
- Una clase muy amplia de procesos estocásticos  $Z_t$  generadores de series de tiempo está descrita por la ecuación

$$(1 - B)^d Z_t = u_t,$$

donde:

$B$  es el operador de rezagos

$(1 - B)$  es el operador diferencia

$d$  es una constante

$u_t$  es un proceso estacionario

- En este caso se dice que  $Z_t$  es un proceso integrado de orden  $d$ , y se denota como

$$Z_t \sim I(d)$$

- Es decir,  $Z_t$  es un proceso integrado de orden  $d$  si su  $d$ -ésima diferencia es un proceso estacionario.
  - El comportamiento de la memoria del proceso (o su función de autocorrelación) está gobernado por el valor de la constante  $d$ .
- ⇒ Si  $d=0$ ,  $Z_t$  es un proceso estacionario de memoria corta o  $I(0)$ .

⇒ Si  $d$  es un número entero positivo,  $Z_t$  tiene de memoria persistente y  $d$  raíces unitarias.

Generalmente  $d=1,2$ .

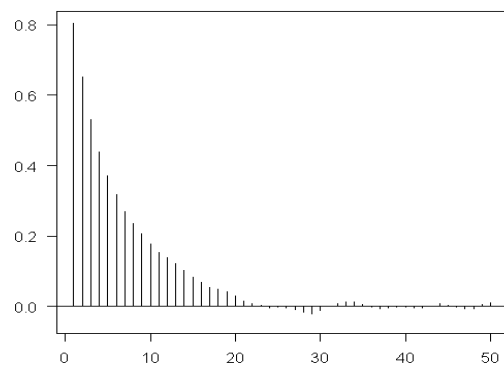
⇒ Si  $d$  es un número real no entero, se dice que  $Z_t$  es un proceso fraccionalmente integrado.

➤ Para  $0 < d < 0.5$ ,  $Z_t$  es un proceso estacionario de memoria larga.

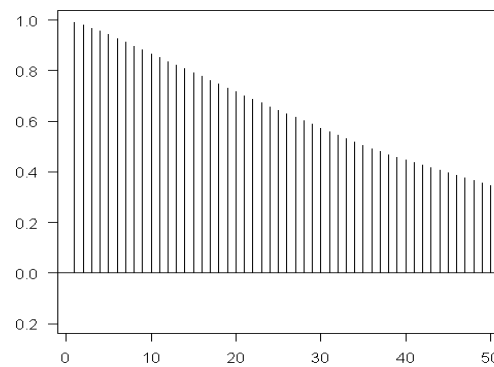
➤ Para  $0.5 \leq d < 1.0$ ,  $Z_t$  es un proceso no estacionario de memoria larga, con reversión en el nivel (o con reversión a la media).

➤ Para  $1.0 < d$ ,  $Z_t$  es un proceso no estacionario, sin reversión a la media.

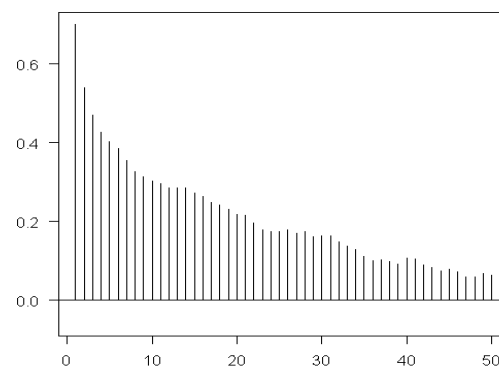
ACF muestral de una serie con  $d=0$



ACF muestral de una serie con  $d=1$



ACF muestral de una serie con  $d=0.3$

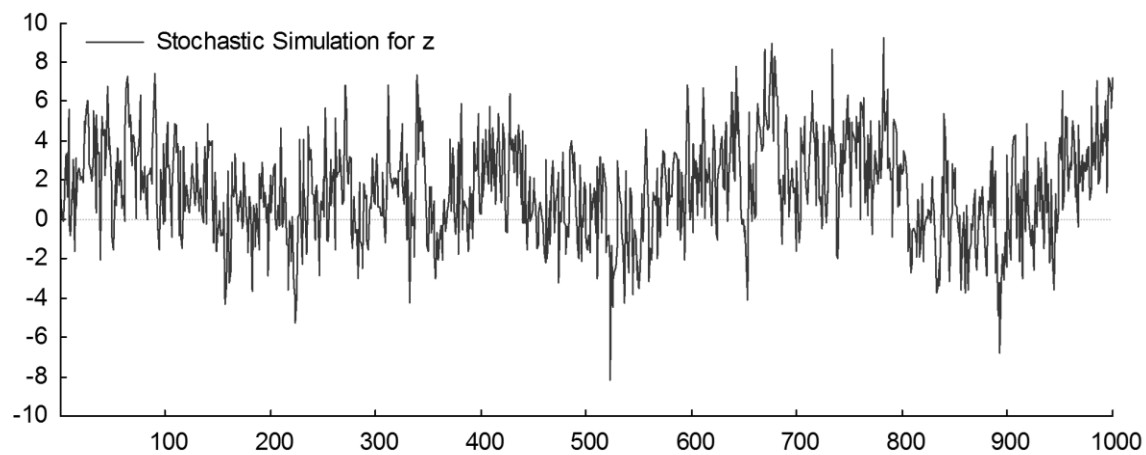


- Los modelos integrados proporcionan una gran flexibilidad en **la interpretación de la persistencia en términos del efecto que tiene un cambio unitario en el shock** (innovación) sobre los valores futuros de la serie.
  - ⇒ En el proceso con  $d=0$ , el efecto de un shock acaba desapareciendo en el corto plazo.
  - ⇒ En los procesos con  $d = 1, 2$ , el efecto de un shock persiste indefinidamente.
  - ⇒ En un proceso fraccionalmente integrado con  $0 < d < 1$ , el efecto de un shock dura mucho tiempo pero finalmente acaba desapareciendo, incluso en el intervalo  $1/2 \leq d < 1$ , donde el proceso no es estacionario.

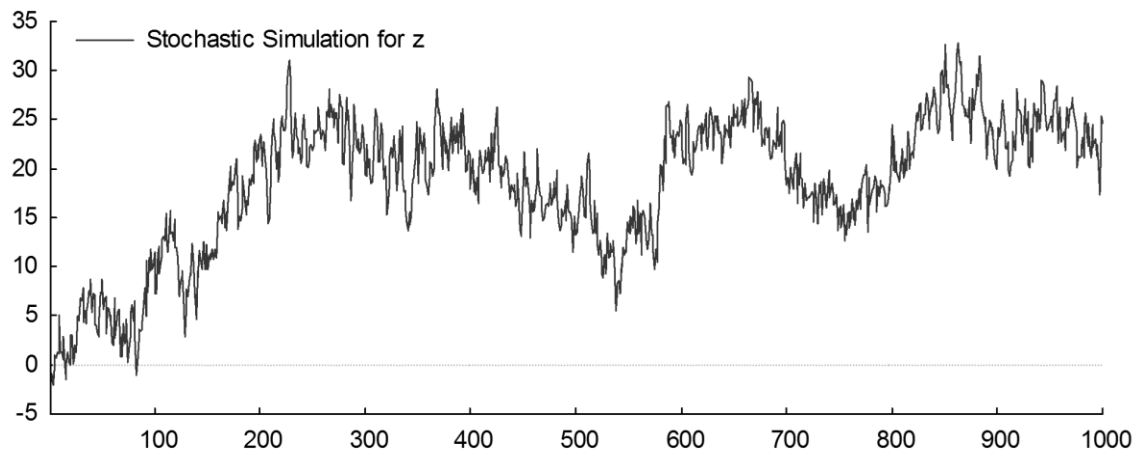


- Granger (1980) y Granger y Joyeux (1980) señalan que la práctica habitual de diferenciar una serie de tiempo aparentemente no estacionaria (decrecimiento lento de su ACF) hasta conseguir estacionariedad, puede tener consecuencias negativas en la correcta modelación.
  - ⇒ Frecuentemente la serie diferenciada se convierte en una serie en la cual se eliminó la componente de bajas frecuencias, que es muy importante en las predicciones a largo plazo.
  - ⇒ Para modelar este tipo de series, la diferenciación entera es “excesiva” (sobrediferenciación) pero la no diferenciación tampoco es adecuada (subdiferenciación).
- \*\* Aguado (1982) caracteriza el caudal del Río Nilo como un proceso ARIMA, debido a que su ACF muestral “no se va rápidamente hacia cero”.

Simulación para un proceso con  $d=.4$



Simulación para un proceso con  $d=.8$



# El modelo ARFIMA

## Definición.

Se dice que un proceso estocástico  $\{Z_t\}$  sigue un proceso ARFIMA(p,d,q) si es una solución a la ecuación

$$\phi(B)(1-B)^d Z_t = \theta_0 + \theta(B)a_t, \quad t = 1, \dots, n$$

donde  $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$  y  $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q$  son, respectivamente, los polinomios autorregresivo y de medias móviles de orden p y q de un proceso ARMA, cuyos ceros están fuera del círculo unidad y no tienen raíces comunes;  $\theta_0$  es una constante,  $d$  es un número real no entero llamado el parámetro de diferenciación fraccional,  $a_t$  es la “innovación”, la cual para  $t=1,2,\dots,n$ , son variables aleatorias no observables independientes e idénticamente distribuidas con media cero y varianza finita  $\sigma_a^2$ , y

$$(1-B)^d = \sum_{j=0}^{\infty} b_j B^j$$

donde  $b_0=1$  y  $b_j = \frac{j-d-1}{j} b_{j-1}$ ,  $j \geq 1$

es el operador de diferencia fraccional, definido para  $d > -1$ .

- Si los polinomios  $\phi(B)$  y  $\theta(B)$  tienen sus ceros fuera del círculo unidad, y los valores del parámetro  $d$  se encuentran en el intervalo  $-1/2 < d < 1/2$ ,  $d \neq 0$ , el proceso ARFIMA(p,d,q) es estacionario e invertible.
- La componente ARMA(p,q) del modelo ARFIMA es denominada la componente de corto plazo.
- Expansiones infinitas del modelo ARFIMA estacionario e invertible,  $-1/2 < d < 1/2$ .

$\Rightarrow$  Forma MA( $\infty$ ):

$$Z_t = (1 - B)^{-d} \phi(B)^{-1} \theta(B) a_t = \psi(B) a_t$$

$$\text{con } \psi_j = \frac{\theta(1) j^{d-1}}{\phi(1) \Gamma(d)} \quad \text{cuando } j \rightarrow \infty$$

$\Rightarrow$  Forma AR( $\infty$ ):

$$\pi(B) Z_t = (1 - B)^d \phi(B) \theta(B)^{-1} Z_t = a_t$$

$$\text{con } \pi_j = \frac{\phi(1) j^{-d-1}}{\theta(1) \Gamma(-d)} \quad \text{cuando } j \rightarrow \infty$$

- **Caracterización del proceso ARFIMA en el dominio del tiempo**

Hosking (1981) prueba que:

⇒ Cuando  $0 < d < 1/2$  existe una constante positiva  $C$  tal que para  $k$  grande,

$$\rho_k \approx Ck^{2d-1}$$

Es decir, la ACF **decae hiperbólicamente hacia cero** y no es absolutamente sumable, es decir,

$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\rho_k|$  no converge. En este caso se dice que  $Z_t$  tiene memoria larga.

⇒ Cuando  $-1/2 < d < 0$ ,  $Z_t$  es un proceso estacionario dominado por autocorrelaciones negativas y absolutamente sumables. En este caso  $Z_t$  tiene **memoria intermedia** y se dice que es antipersistente.

- **Caracterización del proceso ARFIMA en el dominio de la frecuencia**

Este análisis trata de describir la fluctuación de una serie de tiempo estacionaria en términos ondas sinusoidales en distintas frecuencias.

⇒ Para esto se define la densidad espectral de  $Z_t$ , la cual es la transformada de Fourier de las autocovarianzas  $\gamma_k$  dada por

$$f_Z(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{-i\omega k}, \quad \text{donde } -\pi \leq \omega \leq \pi, \quad i = \sqrt{-1}.$$

⇒ Se puede probar que las  $\gamma_k$  se pueden obtener usando la inversa de la transformada inversa de Fourier,

$$\gamma_k = \int_{-\pi}^{\pi} f_Z(\omega) e^{-i\omega k} d\omega,$$

⇒ Esto muestra que análisis en el dominio del tiempo y en el de la frecuencia son equivalentes.

⇒ Además, si  $k=0$ ,

$$\text{Var}(Z_t) = \gamma_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f_Z(\omega) d\omega$$

Por tanto, el espectro  $f_Z(\omega)$  puede ser interpretado como la descomposición de la varianza del proceso.

- Cuando  $d < 0.5$ , es decir,  $Z_t$  es un proceso estacionario, la función de densidad espectral del proceso ARFIMA es

$$f_Z(\omega) = |1 - e^{-i\omega}|^{-2d} f_W(\omega) = \left[ 2 \operatorname{sen} \frac{\omega}{2} \right]^{-2d} f_W(\omega), \quad 0 \leq \omega \leq \pi$$

donde  $f_W(\omega) = \frac{\sigma_a^2}{2\pi} \left| \frac{\theta(e^{-i\omega})}{\phi(e^{-i\omega})} \right|^2$  es la densidad espectral del proceso ARMA(p,q),

$$W_t = (1 - B)^d Z_t.$$

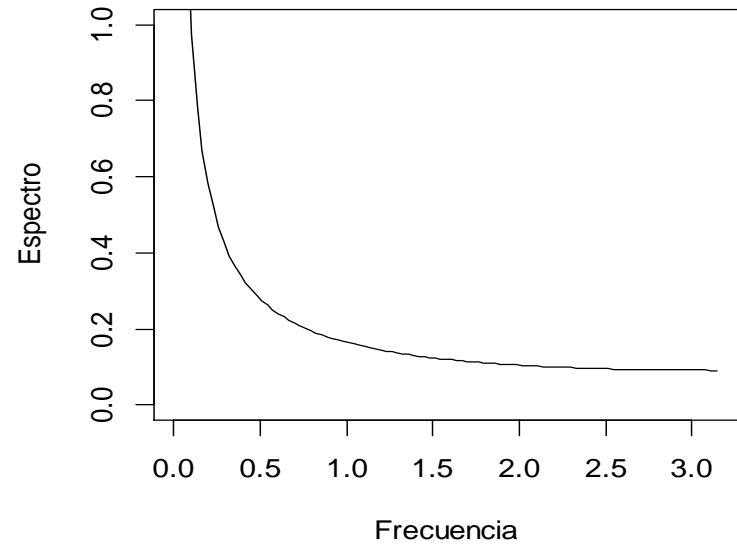
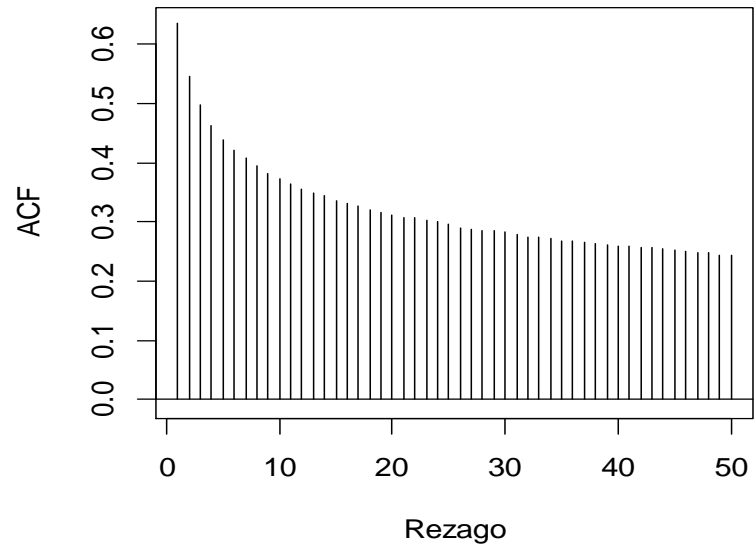
- Cuando  $\omega \rightarrow 0^+$ ,  $f_Z(\omega) \approx C_f |\omega|^{-2d}$ , donde  $C_f$  es una constante.

$\Rightarrow$  Para valores  $0 < d < 0.5$ , la densidad espectral es una función decreciente de  $\omega$  no acotada en el origen, y está dominada por las frecuencias bajas.

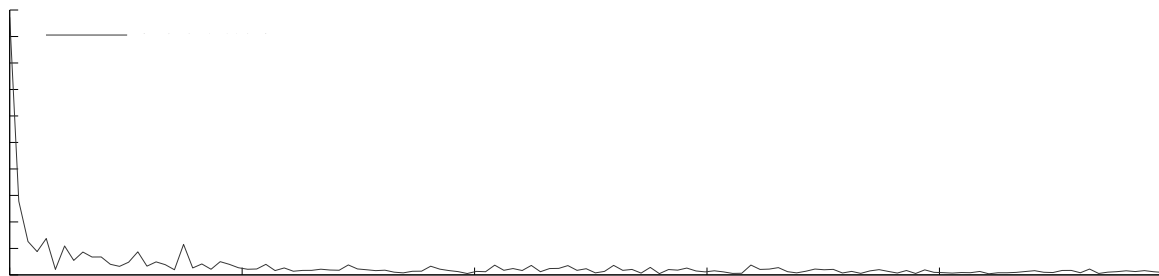
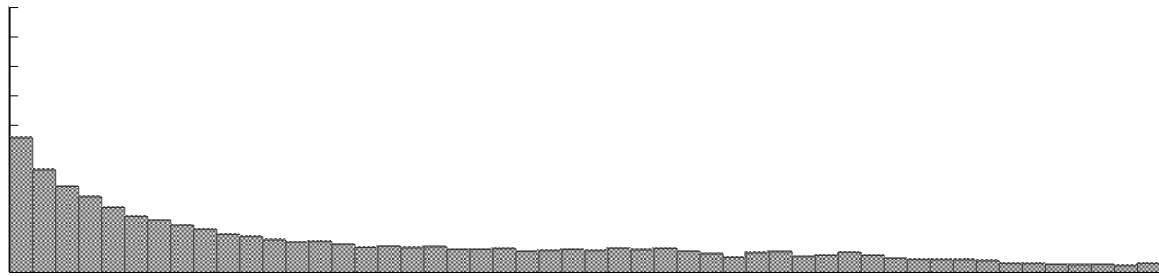
$\Rightarrow$  Esto muestra la relación directa que hay entre la persistencia de las autocorrelaciones en rezagos grandes y la dinámica del espectro en las frecuencias bajas.



ACF y Densidad Espectral teóricas  
ARFIMA(0, $d$ ,0) con  $d=0.4$



### Estimación de la ACF y de la Densidad espectral ARFIMA(0,d,0) con $d=0.4$



- ⇒ Si  $d < 0$ , la densidad espectral se anula en el origen y está dominada por las frecuencias altas. En este caso, se dice que el proceso ARFIMA presenta dependencia negativa o antipersistencia, y el proceso tiene memoria intermedia.
- El proceso ARFIMA( $p, d, q$ ) proporciona una gran flexibilidad en la modelación del comportamiento dinámico de algunas series de tiempo series, ya que permite describir simultáneamente las propiedades dinámicas:
    - ⇒ En el largo plazo, a través del parámetro  $d$ ,
    - ⇒ En el corto plazo, a través de los parámetros de la componente ARMA del modelo

# Metodología para la identificación del modelo ARFIMA( $p, d, q$ )

- La construcción del modelo ARFIMA requiere obtener la identificación de:
  - ⇒ La componente de diferenciación fraccional  $d$
  - ⇒ La componente de corto plazo ARMA
- La identificación basada en el empleo de criterios de información: Schmidt y Tshernig (1994) presentan un estudio Monte Carlo. En general, ellos concluyen que:
  - ⇒ En muestras finitas, la correcta identificación del modelo cuando hay componente de corto plazo sólo se logra en una pequeña fracción de los experimentos.
  - ⇒ La selección del verdadero modelo puede no asegurarse aún para muestras moderadamente grandes.
  - ⇒ El éxito en la identificación mejora a medida que  $n$  crece.

- Posible proceso de identificación:

⇒ Dado  $d$ , obtenga  $(1-B)^d Z_t = u_t$

⇒ Como  $u_t$  es un ARMA(p,q), use los procedimientos tradicionales de identificación (Box-Jenkins)

- Problema:  $d$  es un número real no entero.

- Solución: Estime a  $d$
- Para la estimación del parámetro de diferenciación fraccional se han propuesto métodos semiparamétricos y paramétricos.
  - ⇒ Los métodos semiparamétricos no exigen la especificación de la componente de corto plazo.
  - ⇒ Los procedimientos de máxima verosimilitud exigen que el modelo sea especificado completamente.
- Cheung (1990) muestra que los métodos basados en máxima verosimilitud presentan un comportamiento generalmente superior a los métodos semiparamétricos como el sugerido por Geweke y Porter-Hudak (1983) y otras modificaciones.
  - ⇒ Pero es imposible usarlos adecuadamente, pues se desconoce la estructura de corto plazo.
- Boes, Davis y Gupta (1989), muestran que la escogencia errónea de la componente de corto plazo puede conducir a la estimación muy equivocada del parámetro de memoria  $d$ .
- Crato y Ray (1996) y Smith, Taylor y Yadav (1997) muestran que el sesgo en la estimación del parámetro  $d$  puede afectar también a la identificación del modelo ARFIMA que mejor representa el comportamiento dinámico de una serie.

## **Procedimiento basado en la estimación inicial del parámetro de diferenciación fraccional**

- Algunos autores tales como Wei (2006), Reisen, Abraham y Lopes (2001), Castaño et. al. (2008) proponen un procedimiento de identificación de un modelo ARFIMA similar al proceso de identificación en un modelo ARIMA sugerido por Box-Jenkins (1970)
- Este procedimiento se basa en:
  - ⇒ Estimar primero a  $d$
  - ⇒ Diferenciar la serie empleando este valor de  $d$
  - ⇒ Usar la serie diferenciada para seleccionar los órdenes adecuados  $p$  y  $q$ , para la componente de corto plazo.

- Reisen, Abrahan y Lopes (2001) sugieren un procedimiento iterativo cuyas etapas se describen a continuación, para una serie de tiempo  $X_t$ :
  - 1) Estime  $d$ . Denote el estimador por  $\hat{d}$ .
  - 2) Obtenga la diferencia fraccional  $\hat{U}_t = (1 - B)^{\hat{d}} X_t$ .
  - 3) Usando el procedimiento de identificación de Box-Jenkins identifique  $p$  y  $q$  y estime los parámetros en el proceso ARMA( $p, q$ ),  $\phi(B)\hat{U}_t = \theta(B)a_t$ .
  - 4) Calcule la serie filtrada  $\hat{Y}_t = \frac{\hat{\phi}(B)}{\hat{\theta}(B)} X_t$ .
  - 5) Estime  $d$  en el modelo ARFIMA(0, $d$ ,0),  $(1 - B)^{\hat{d}} \hat{Y}_t = a_t$ . El valor de  $\hat{d}$  obtenido en esta etapa es el nuevo estimador de  $d$ .
  - 6) Repita los pasos 2) a 5) hasta que los parámetros  $d$ ,  $\phi$ s y  $\theta$ s converjan.
- Los autores sugieren los estimadores obtenidos en la primera iteración (pasos 1), 2) y 3) son suficientes en la práctica.



### Estimación inicial del parámetro $d$ .

A continuación se presentan dos estimadores semiparamétricos tradicionales para el parámetro de diferenciación fraccional, para series estacionarias.

a) El Estimador GPH: Geweke y Porter-Hudak (1983)

Considere la densidad espectral del proceso ARFIMA( $p,d,q$ ).

Tomando su logaritmo natural, se obtiene

$$\ln f_z(\omega_j) = d \ln[2\text{sen}(\omega_j/2)]^{-2} + \ln f_w(\omega_j)$$

Los autores muestran que para  $\omega_j$  cercanas a cero, es decir,  $j=1,2, \dots, m < (n/2)$  y tal que  $m/n \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , la estimación de  $d$  puede basarse en la regresión OLS de

$$Y_j = c + dX_j + e_j$$

donde

$$Y_j = \ln I_z(\omega_j), \quad X_j = \ln \left[ \frac{1}{4[\text{sen}(\omega_j/2)]^2} \right]$$

y donde

$\Rightarrow$  Las  $e_j$  son variables aleatorias i.i.d.

$\Rightarrow \omega_j$  son las la frecuencias de Fourier  $\omega_j = 2\pi j$ ,  $j = 1, 2, \dots, [n/2]$ .

$\Rightarrow I_z(\omega_j) = \frac{1}{2\pi} [\hat{\gamma}_0 + 2 \sum_{l=1}^{n-1} \hat{\gamma}_l \cos(l\omega_j)]$  es la j-ésima ordenada del periodograma.

$\Rightarrow$  El número de observaciones en la regresión es  $m = n^\alpha$ , con  $0 < \alpha < 1$ .

## b) El estimador SPR

Brockwell y Davis (1991) muestran que el periodograma no es un estimador consistente de la función de densidad espectral. Reisen (1994), propuso usar un estimador consistente el cual es una versión suavizada del periodograma, denominado el estimador SPR.

El estimador SPR se obtiene reemplazando la función de densidad espectral por el periodograma suavizado dado por

$$I_S(\omega_j) = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=-v}^v \kappa\left(\frac{l}{v}\right) \hat{\gamma}(l) \cos(l\omega_j)$$

donde  $\kappa(\cdot)$  es la ventana de Parzen. El estimador SPR se obtiene aplicando OLS al modelo de regresión (4), usando el periodograma suavizado  $I_S(\omega_j)$  en vez del periodograma  $I_Z(\omega_j)$ . El punto de truncamiento  $v = n^\beta$ , con  $0 < \beta < 1$  y, como antes  $m = n^\alpha$ , con  $0 < \alpha < 1$ .

- Algunos autores, entre ellos Agiakloglou, Newbold y Wohar (1993), señalan la pérdida de eficiencia del estimador GPH en muestras finitas. Señalan que cuando existe una componente AR(1) o MA(1) con parámetro cerca a la unidad, el estimador tiene un sesgo enorme y es muy ineficiente. Robinson (1995b) señala que el supuesto de normalidad del proceso es muy restrictivo.
- Para el caso del estimador SPR, Reinsen, Abraham y Lopes reportan pérdida de eficiencia para el caso donde existe componentes de corto plazo AR(1) o MA(1).

## c) La metodología propuesta

- Para series ARFIMA estacionarias, Castaño, Gómez y Gallón (2008) proponen un procedimiento para obtener un estimador inicial para el parámetro  $d$ , basados en una aproximación autorregresiva finita de la componente de corto plazo de un modelo ARFIMA( $p,d,q$ ) estacionario e invertible.
- Especificando el modelo ARFIMA alternativamente como:

$$\pi(B)(1-B)^d Z_t = a_t$$

donde  $\pi(B) = \theta_q^{-1}(B)\phi_p(B) = 1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots$ , es la componente dual autorregresiva infinita del modelo de corto plazo ARMA( $p, q$ ) del modelo ARFIMA( $p,d,q$ ), los autores proponen estimar el parámetro  $d$  aproximando el polinomio infinito  $\pi(B)$  por medio de un polinomio autorregresivo finito  $\pi^*(B)$  donde  $\pi^*(B) = 1 - \pi_1^* B - \pi_2^* B^2 - \dots - \pi_{p^*}^* B^{p^*}$  para un orden adecuado de  $p^*$ . La estimación de  $d$  se lleva a cabo realizando estimación de máxima verosimilitud en el modelo aproximado ARFIMA( $p^*,d,0$ ).

- Basados en esta aproximación, el estadístico para probar la hipótesis nula de memoria corta  $H_0 : d = 0$ , contra la alternativa de larga memoria,  $H_1 : d > 0$ , está dado por:

$$t_d = \frac{\hat{d}}{se(\hat{d})} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

donde  $\hat{d}$  es el estimador de máxima verosimilitud del parámetro  $d$ , y  $se(\hat{d})$  es su error estándar, obtenidas en el modelo aproximado.

- Castaño et al. (2008) mostraron que usando una aproximación autorregresiva dada por el entero más próximo a  $p^* = n^{1/3}$  (Véase Said y Dickey, 1984, para una aproximación autorregresiva en modelos ARIMA), la prueba mantiene en general un tamaño promedio adecuado y una potencia generalmente mayor que la de las pruebas allí comparadas. Adicionalmente, Castaño, Gallón y Gómez (2010), muestran que los resultados obtenidos por Castaño et al. (2008) pueden mejorarse en potencia y tamaño empleando una aproximación autorregresiva de  $p^* = [n^{1/4}]$ .

Para series ARFIMA no estacionarias, Lemus y Castaño (2013) modificaron la prueba anterior de Castaño, Gómez y Gallón (2008). Suponga que  $Z_t$  es un proceso ARFIMA no estacionario de la forma

$$\phi(B)(1-B)^d Z_t = \theta(B)a_t$$

Este proceso puede ser escrito equivalentemente como

$$\phi(B)(1-B)^{1+d^*} Z_t = \theta(B)a_t$$

donde, si  $d^*=0$  entonces  $Z_t$  es un proceso no estacionario de raíz unitaria. Si  $-0.5 < d^* < .05$ , el proceso es no estacionario de raíz fraccional. Además, cuando  $-0.5 < d^* < 0$ , entonces  $Z_t$  es un proceso no estacionario de memoria larga con reversión en el nivel y su primera diferencia es estacionaria y antipersistente. Pero si  $0 < d^* < 0.5$ , el proceso  $Z_t$  es no estacionario de memoria larga sin reversión a la media y su primera diferencia es estacionaria de memoria larga.

Por tanto, para estimar el parámetro de diferenciación fraccional  $d$  se estima  $d^*$  en el modelo aproximado

$$\pi^*(B)(1-B)^{d^*}W_t = \theta_0 + a_t,$$

donde  $W_t = (1-B)Z_t$ .

El estimador de  $d$  es:  $\hat{d} = 1 + \hat{d}^*$ .



# Simulación

## Experimento Monte Carlo

- El procedimiento se basa en:
  - ⇒ Simular la serie ARFIMA.
  - ⇒ Usar los tres procedimientos descritos sobre la serie para estimar el parámetro  $d$ .
  - ⇒ Aplicar luego la diferenciación fraccional a la serie usando la estimación de  $d$ , donde la estructura de rezagos infinita de  $(1-B)^d = \sum_{j=0}^{\infty} b_j B^j$  se reemplaza por  $(1-B)_+^d = \sum_{j=0}^{t-1} b_j B^j$ .
  - ⇒ Usar un procedimiento de identificación automática del modelo ARMA que queda en la serie diferenciada fraccionalmente.
  - ⇒ Reportar si hubo éxito o no en la identificación.
- Para realizar el proceso anterior se utilizaron los paquetes `fracdiff`, `ugarch`, `arfima` y `forecast` del programa R. En todos los casos  $a_t \sim N(0,1)$ .

Se emplearon 1000 repeticiones para realizaciones de  $n=500$  y  $1000$  datos.

Amplitud de banda GPH=0.5

Amplitud de banda SPR=0.5, beta=0.9

**Caso estacionario.** Se simularon los siguientes procesos:

⇒ Modelo 1. ARFIMA(0,d,0) o ruido blanco fraccional.

$$(1-B)^d Z_t = a_t$$

donde  $d=0.1, 0.25, 0.4, 0.45$ .

⇒ Modelo 2. ARFIMA(1,d,0)

$$(1-\phi B)(1-B)^d Z_t = a_t$$

donde  $\phi = 0.7, -0.7$ ,  $d=0.1, 0.25, 0.4, 0.45$

⇒ Modelo 3. ARFIMA(0,d,1)

$$(1-B)^d Z_t = (1-\theta B)a_t$$

donde  $\theta = 0.7, -0.7$ ,  $d=0.1, 0.25, 0.4, 0.45$

⇒ Modelo 4. ARFIMA(1,d,1)

$$(1-\phi B)(1-B)^d Z_t = (1-\theta B)a_t$$

donde  $\phi = 0.7, -0.7$ ,  $\theta = 0.3, -0.3$ ,  $d=0.1, 0.25, 0.4, 0.45$

# Resultados

Resultados agregados por el valor de  $d$  para todos los modelos.

n=500

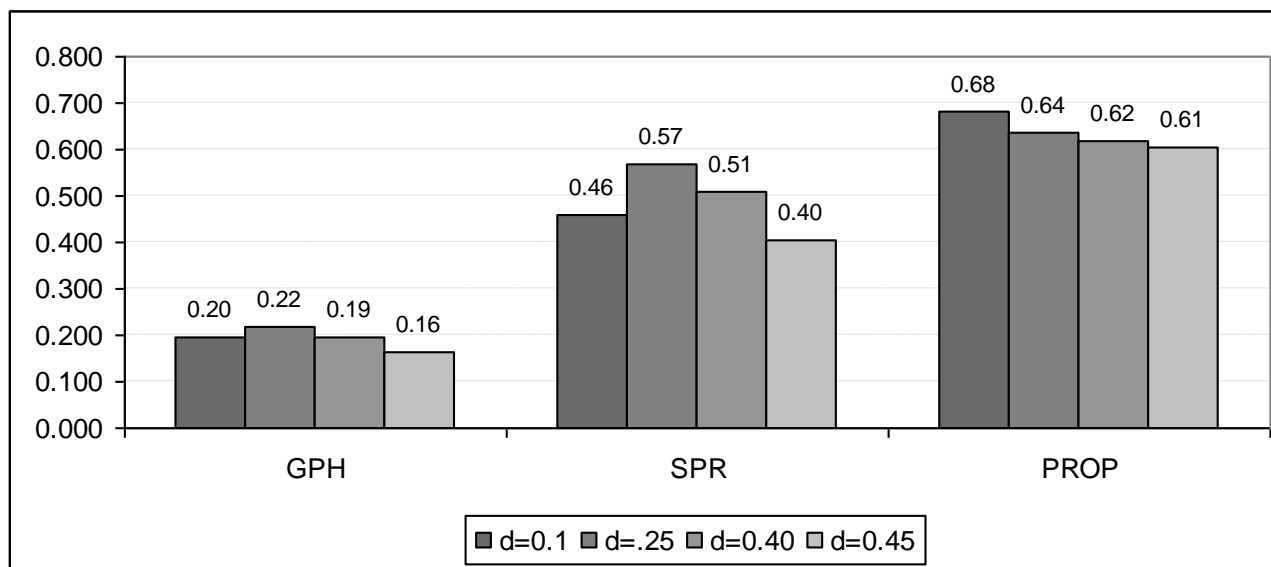
$d=0.1$		$d=.25$	
Estimador	Prom.éxitos	Estimador	Prom.éxitos
GPH	0.197	GPH	0.217
SPR	0.461	SPR	0.568
PROP	0.680	PROP	0.638
$d=0.40$		$d=0.45$	
Estimador	Prom.éxitos	Estimador	Prom.éxitos
GPH	0.194	GPH	0.162
SPR	0.507	SPR	0.404
PROP	0.617	PROP	0.606

Resultados agregados por el valor de  $d$  para todos los modelos.

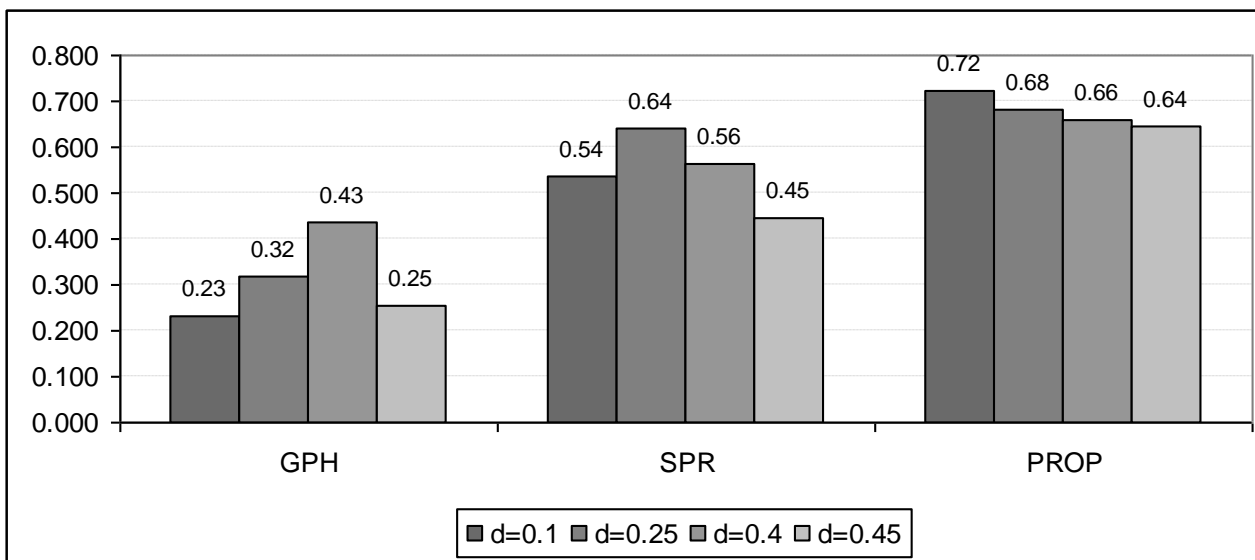
n=1000

$d=0.1$		$d=0.25$	
Estimador	Prom.éxitos	Estimador	Prom.éxitos
GPH	0.230	GPH	0.316
SPR	0.537	SPR	0.639
PROP	0.722	PROP	0.681
$d=0.4$		$d=0.45$	
Estimador	Prom.éxitos	Estimador	Prom.éxitos
GPH	0.434	GPH	0.253
SPR	0.565	SPR	0.447
PROP	0.658	PROP	0.644

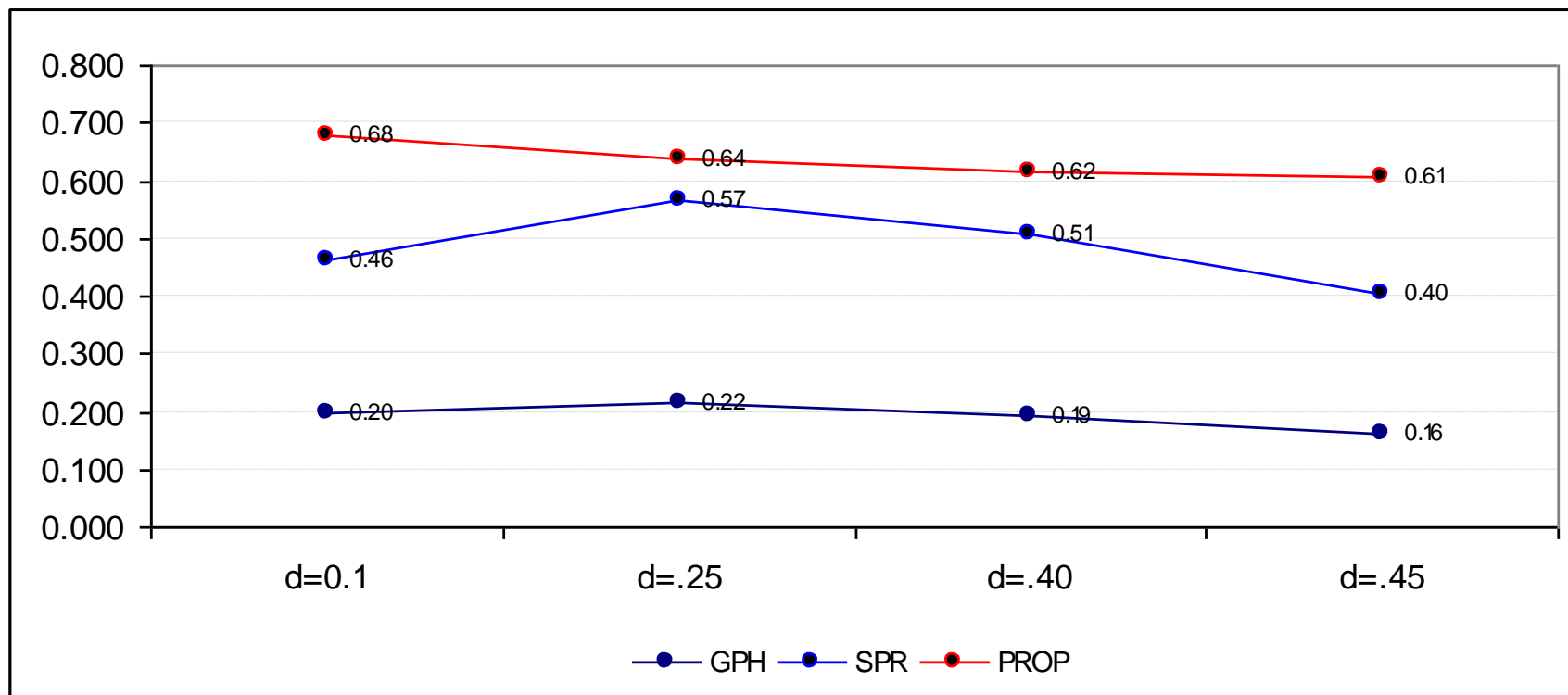
n=500



n=1000

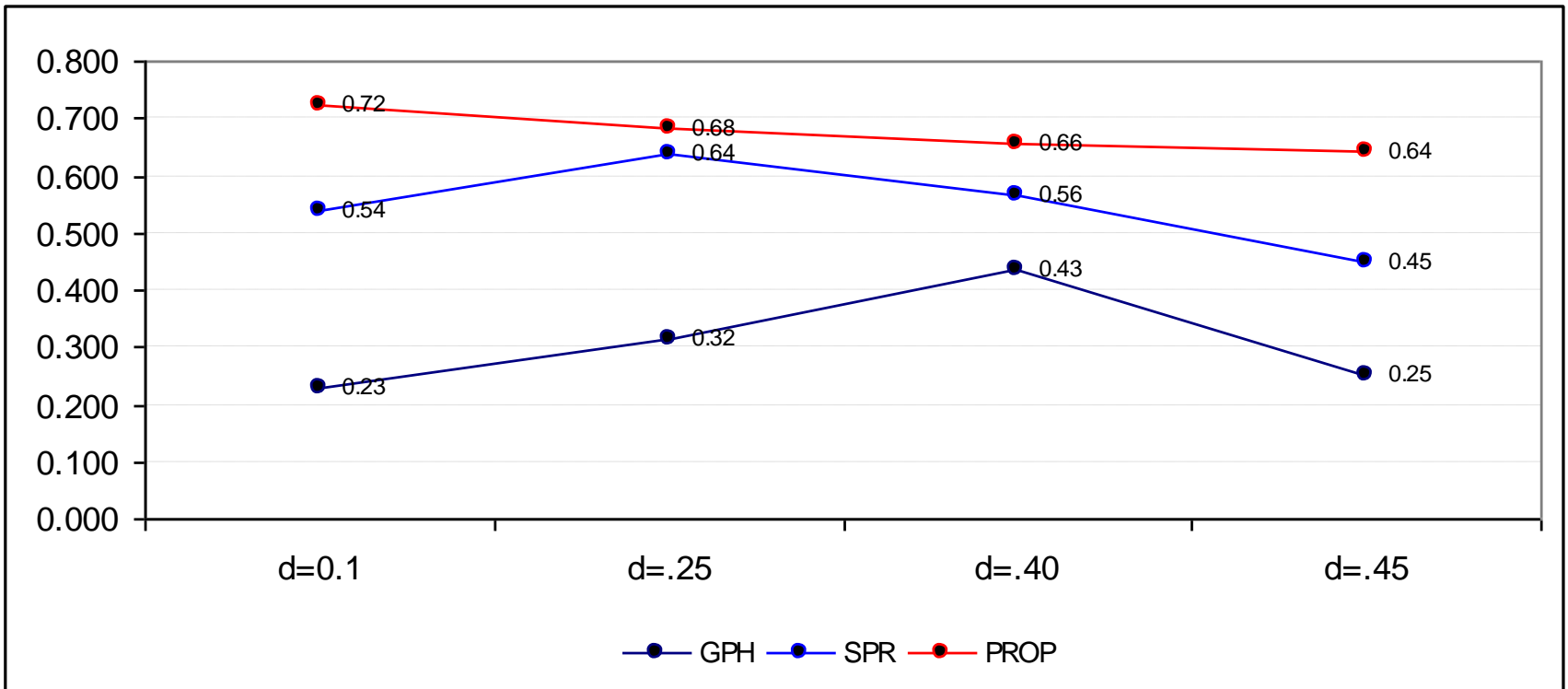


n=500



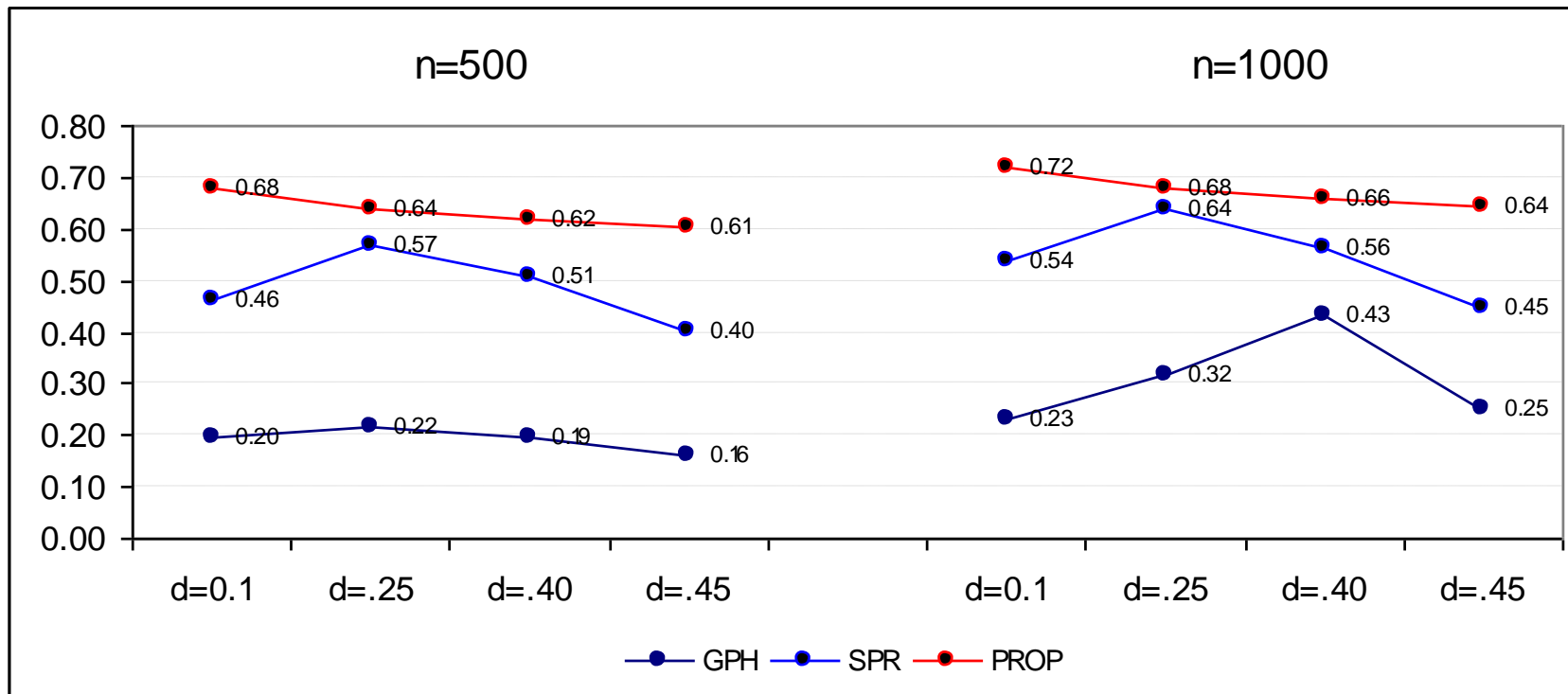
# Resultados

n=1000





## Efecto tamaño muestral



## Resultados totales

Estimador	Promedio de éxitos total
GPH	0.306
SPR	0.555
Propuesta	0.710

# Simulación

**Caso no estacionario.** Se simularon los siguientes procesos.

**Modelo 1.** El modelo ARFIMA(0,1+d,0)

Donde  $d = -0.45, -0.4, -0.25, -0.10, 0.10, 0.25, 0.40, 0.45$ .

**Modelo 2.** El modelo ARFIMA(1,1+d,0)

donde  $\phi = 0.7, -0.7$  y  $d = -0.45, -0.4, -0.25, -0.10, 0.10, 0.25, 0.40, 0.45$ .

**Modelo 3.** El modelo ARFIMA(0,1+d,1)

donde  $\theta = 0.3, -0.3$  y  $d = -0.45, -0.4, -0.25, -0.10, 0.10, 0.25, 0.40, 0.45$ .

**Modelo 4.** El modelo ARFIMA(1,1+d,1)

donde  $\phi = 0.7, -0.7$ ,  $\theta = 0.3, -0.3$  y  $d = -0.45, -0.4, -0.25, -0.10, 0.10, 0.25, 0.40, 0.45$ .

# Resultados

Los procedimientos se realizan sobre la serie  $(1-B)Z_t$

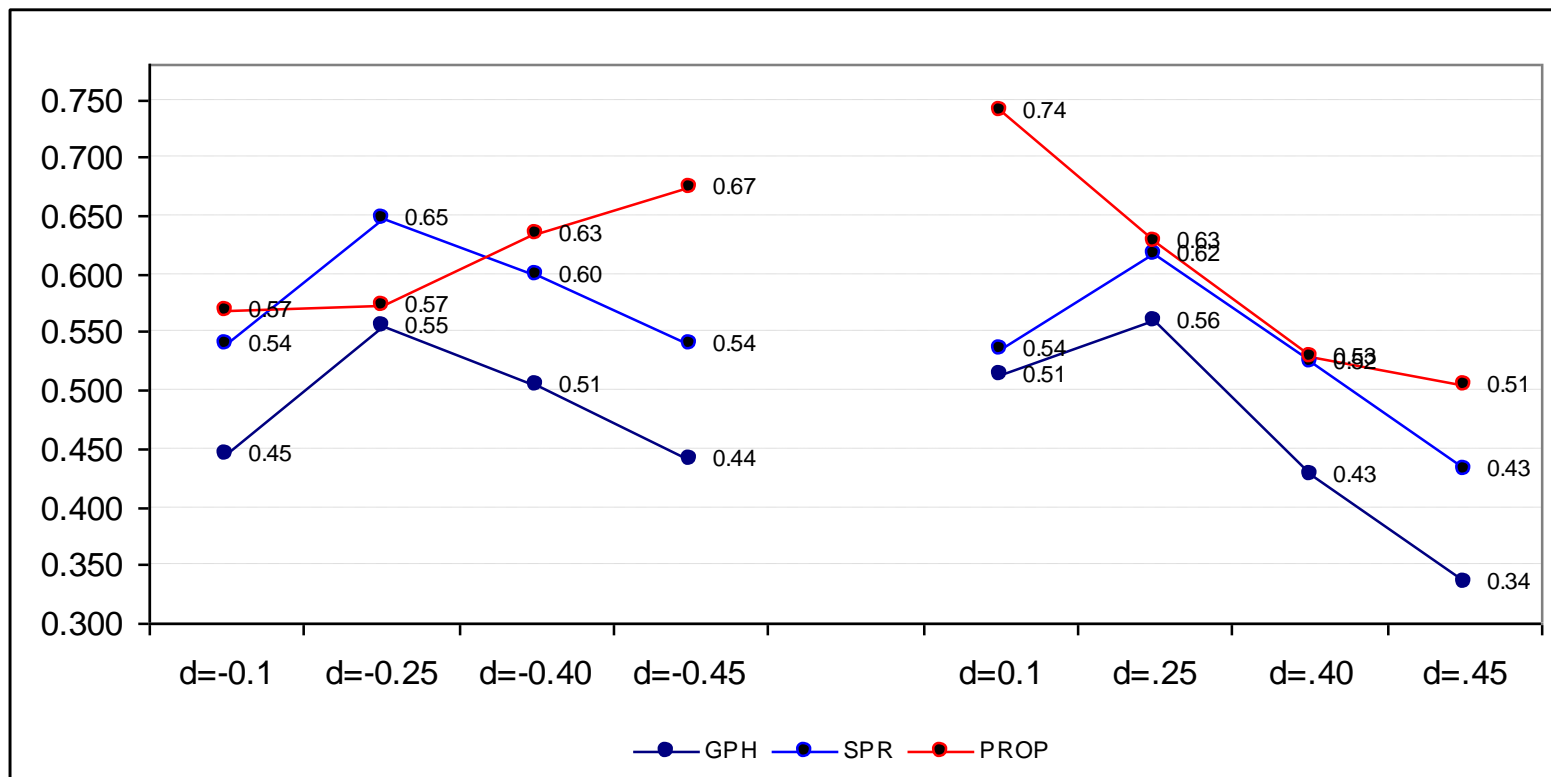
Proporción de éxitos,  $n=500$

$d$	GPH	SPR	PROP
$d = -0.10$	0.446	0.540	0.569
$d = -0.25$	0.555	0.647	0.573
$d = -0.40$	0.506	0.600	0.634
$d = -0.45$	0.442	0.541	0.674
$d = 0.10$	0.513	0.535	0.741
$d = 0.25$	0.560	0.618	0.628
$d = 0.40$	0.427	0.524	0.529
$d = 0.45$	0.336	0.431	0.505

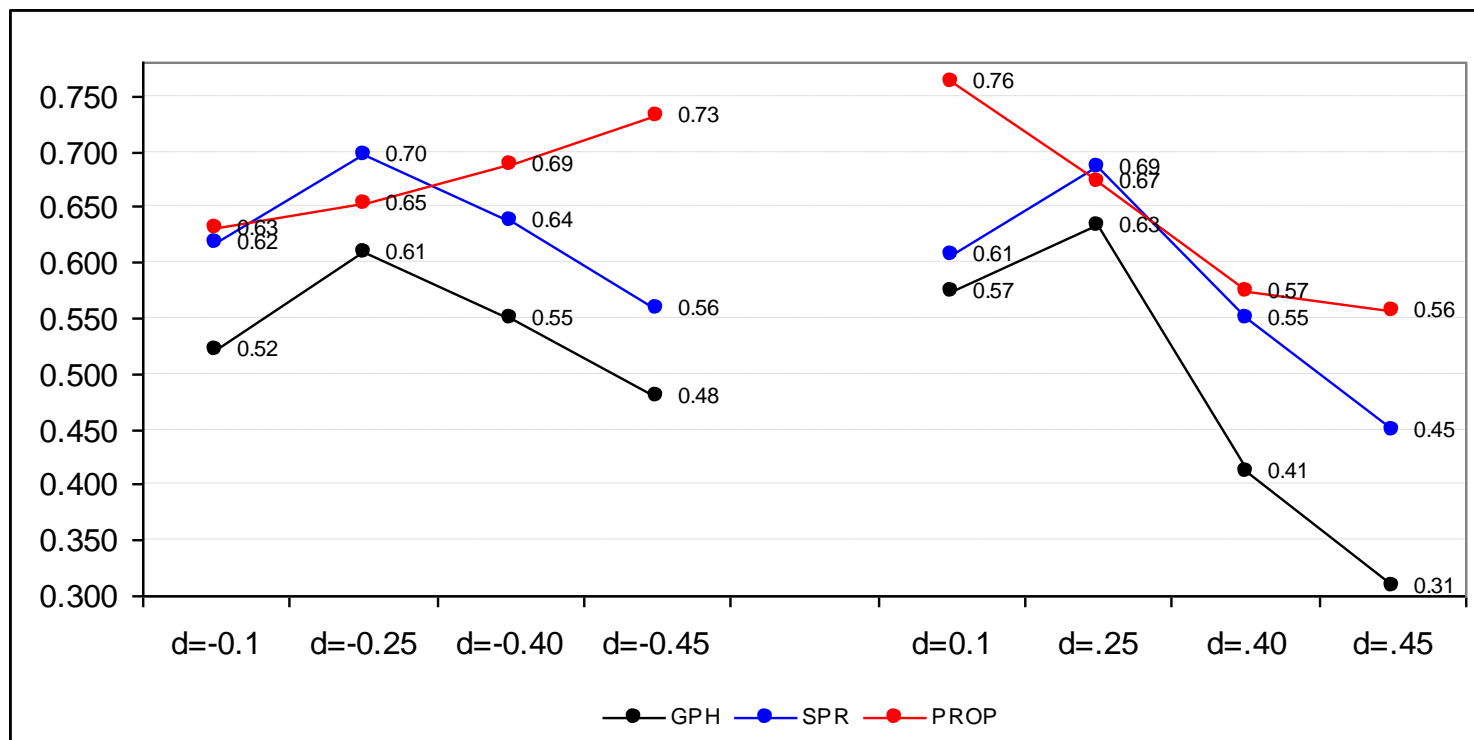
Proporción de éxitos, n=1000

$d$	GPH	SPR	PROP
$d = -0.10$	0.521	0.618	0.630
$d = -0.25$	0.609	0.696	0.654
$d = -0.40$	0.549	0.637	0.688
$d = -0.45$	0.481	0.558	0.731
$d = 0.10$	0.573	0.606	0.763
$d = 0.25$	0.634	0.686	0.672
$d = 0.40$	0.412	0.549	0.575
$d = 0.45$	0.309	0.449	0.556

n=500



n=1000



## Resultados totales

Estimador	total promedio de éxitos
GPH	0.492
SPR	0.577
Propuesta	0.633



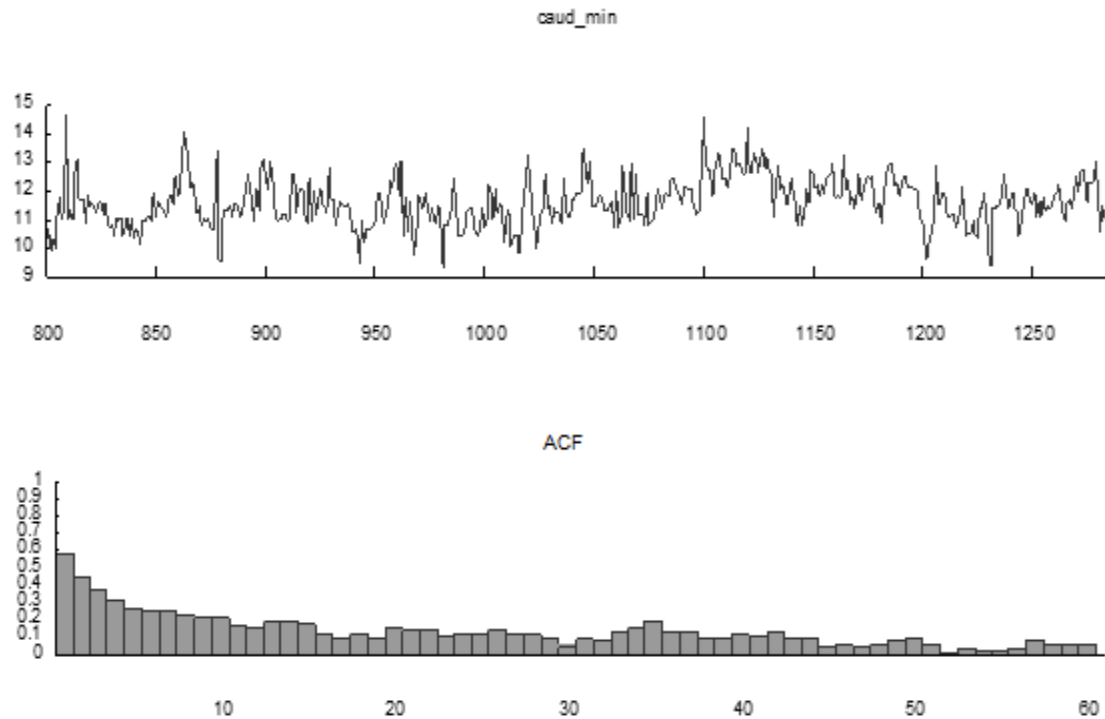
## Conclusiones para los resultados agregados:

- El estimador GPH es el que tiene el más pobre desempeño.
- El estimador SPR tiene un mejor comportamiento que el GPH.
- El estimador propuesto tiende a superar a los estimadores anteriores, en casi todos los casos, aunque no es uniformemente mejor.

# Aplicaciones

## 1. La serie de caudales mínimos anuales del río Nilo para los años 800-1284DC

Caudales anuales mínimos del Río Nilo  
n=485 datos



## Etapa de identificación

### 1. Estimación de $d$

Modelo preliminar:

$$(1-B)^d \pi^*(B)Z_t = \theta_0 + a_t$$

$$(1-B)^d (1 - \pi_1^* B - \dots - \pi_{p^*}^* B^{p^*}) Z_t = \theta_0 + a_t$$

donde  $p^* = \lceil n^{1/4} \rceil = 5$ .

### Estimación MV Modelo preliminar bajo Normalidad

Mean Model : ARFIMA(5,d,0)  
Distribution : norm

#### Optimal Parameters

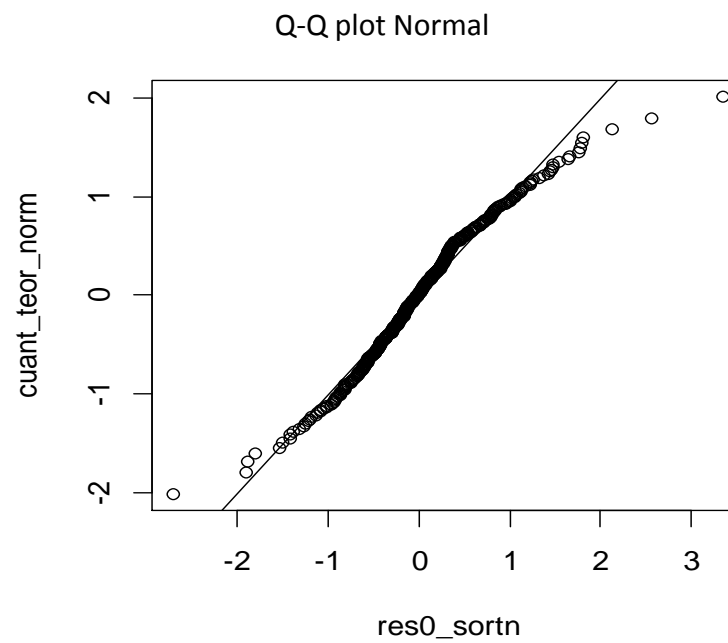
	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
mu	11.519492	0.272563	42.26354	0.000000
ar1	0.080109	0.133285	0.60103	0.547816
ar2	0.024894	0.068213	0.36495	0.715151
ar3	0.014716	0.055698	0.26422	0.791613
ar4	-0.025779	0.051243	-0.50308	0.614911
ar5	-0.030204	0.051543	-0.58599	0.557879
arfima	0.369995	0.126130	2.93343	0.003352
sigma	0.653672	0.021010	31.11270	0.000000

Information Criteria  
Residuals

Akaike	2.0206
Bayes	2.0898
Shibata	2.0201
Hannan-Quinn	2.0478

Q-Statistics on Standardized

	statistic	p-value
Lag[1]	0.001409	0.9701
Lag[p+q+1][6]	0.348626	0.5549
Lag[p+q+5][10]	1.890618	0.8641



Shapiro-Wilk normality test:  $W = 0.972$ ,  $p\text{-value} = 5.372e-08$

Jarque - Bera Normality Test:  $\text{Chi-squared} = 128.6006$ ,  $\text{Asymptotic } p \text{ Value} < 2.2e-16$

## Estimación MV revisada del modelo preliminar bajo distribución t asimétrica

Mean Model : ARFIMA(5,d,0)  
Distribution : sstd

### Optimal Parameters

```
-----
Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
mu      11.140052    0.538006 20.706177 0.000000
ar1      0.003790    0.150696  0.025153 0.979933
ar2      0.034885    0.076712  0.454757 0.649284
ar3     -0.028159    0.052317 -0.538234 0.590416
ar4     -0.058245    0.053407 -1.090578 0.275458
ar5     -0.011559    0.052151 -0.221651 0.824585
arfima   0.444667    0.147637  3.011904 0.002596
sigma    0.662421    0.040572 16.327213 0.000000
skew     1.104604    0.065233 16.933268 0.000000
shape    4.536631    1.002162  4.526845 0.000006
```

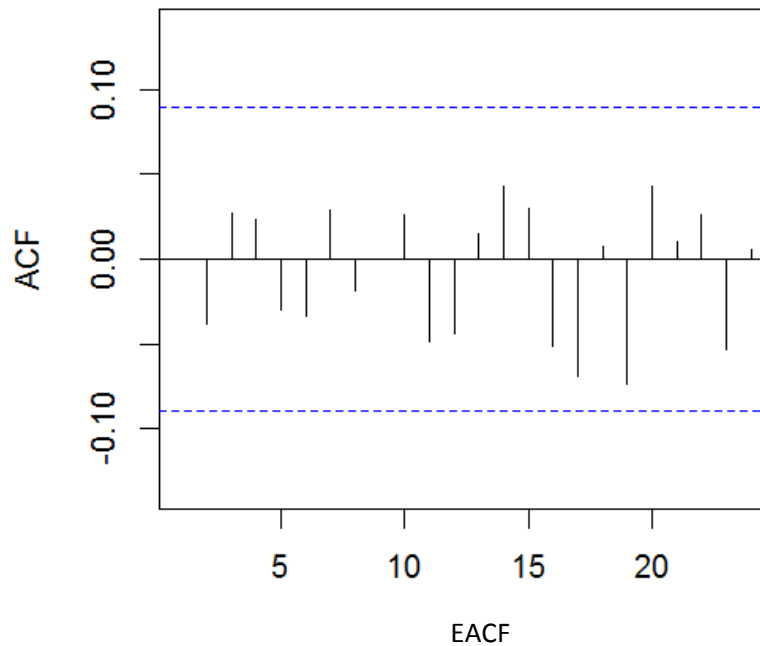
### Information Criteria

```
-----
Akaike      1.9433
Bayes       2.0296
Shibata     1.9425
Hannan-Quinn 1.9772
```

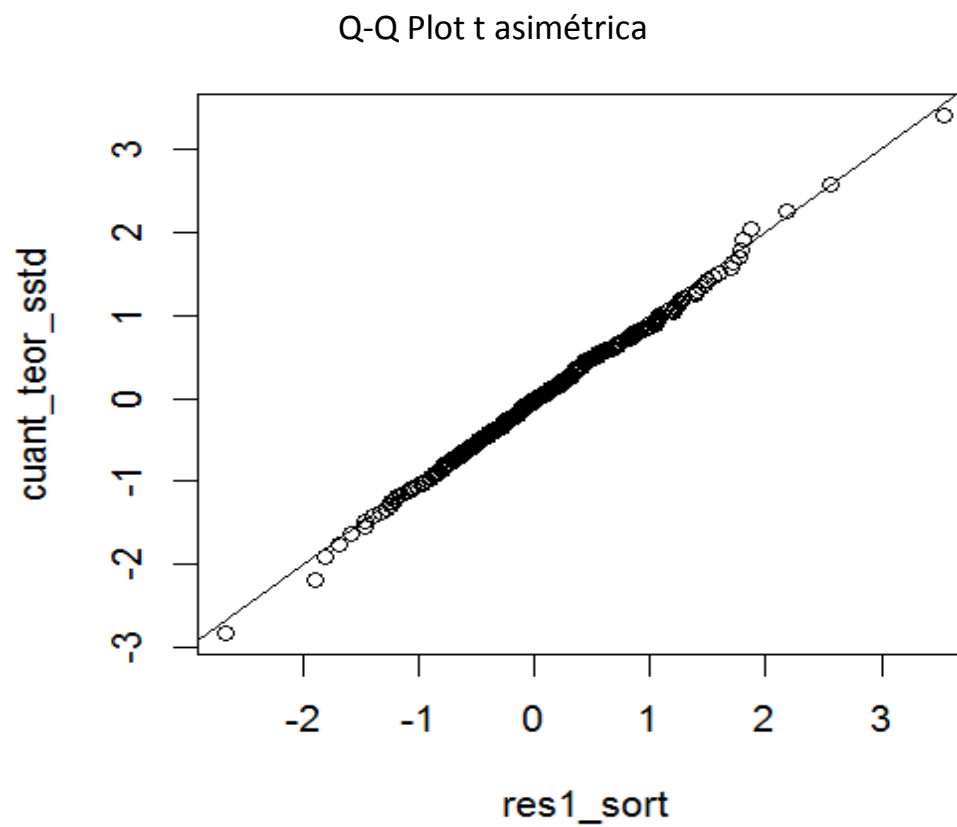
### Q-Statistics on Standardized Residuals

```
-----
statistic p-value
Lag[1]      0.03377 0.8542
Lag[p+q+1][6] 2.34732 0.1255
Lag[p+q+5][10] 3.27342 0.6579
```

Análisis de Residuales



AR/MA	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
1	x	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
2	x	x	o	o	o	o	o	o	o	o	o
3	x	x	x	o	o	o	o	o	o	o	o
4	x	x	o	x	o	o	o	o	o	o	o
5	x	x	o	x	x	o	o	o	o	o	o
6	x	o	x	x	o	x	o	o	o	o	o
7	x	x	o	x	o	x	x	o	o	o	o
8	x	x	o	o	o	x	o	o	o	o	o
9	x	x	o	x	x	x	o	o	o	o	o
10	x	x	o	x	x	x	o	x	o	o	o



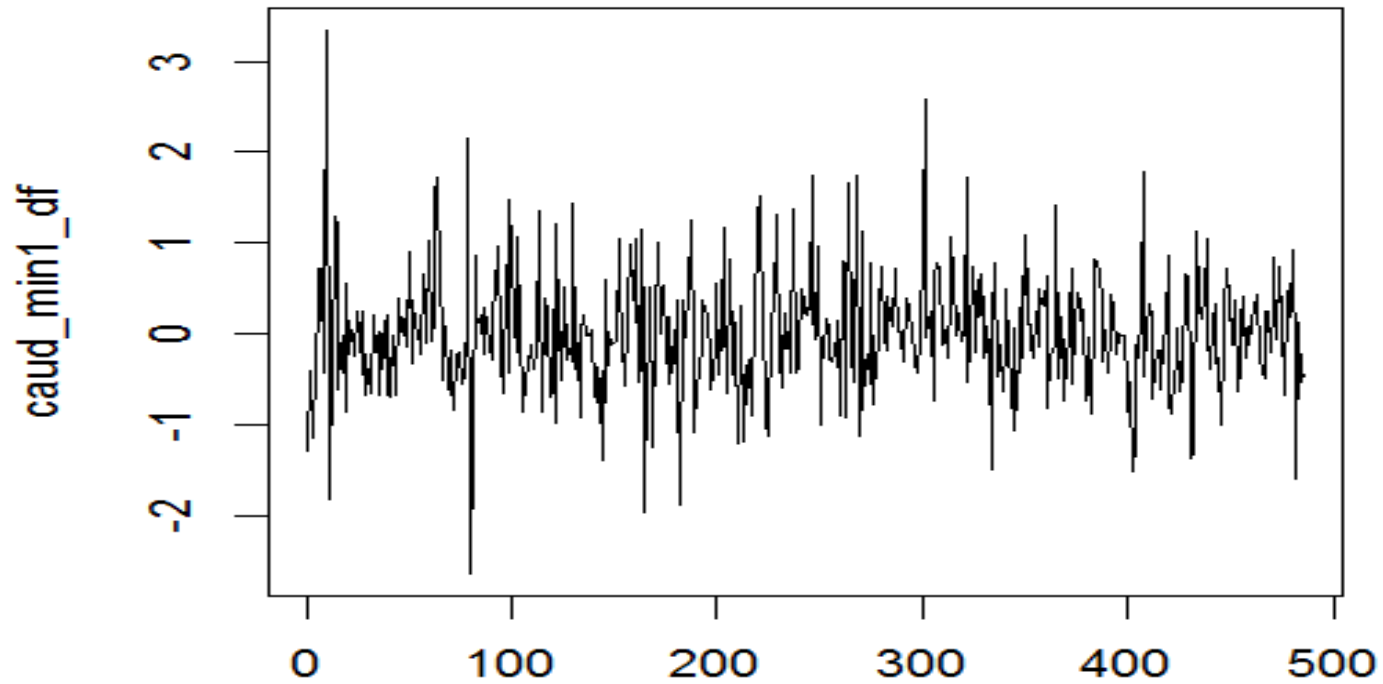
Two-sample Kolmogorov-Smirnov test

$D = 0.0377$ ,  $p\text{-value} = 0.8804$

alternative hypothesis: two-sided

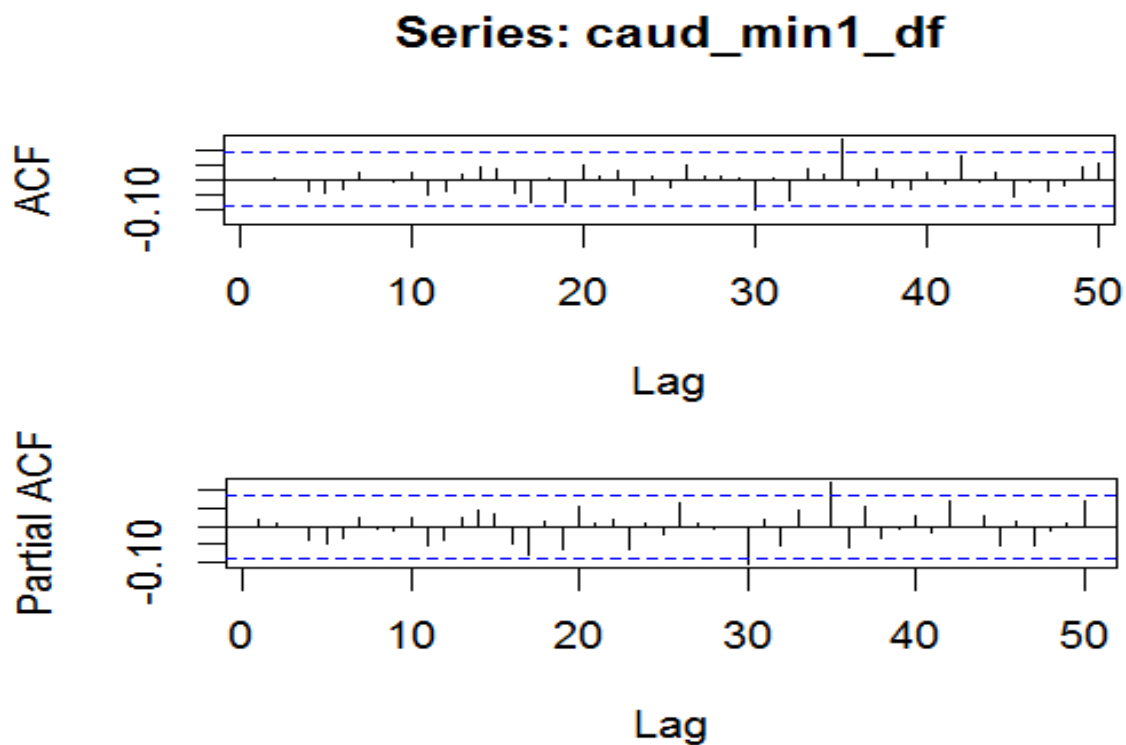
## 2. Diferenciación fraccional

$$W_t = (1-B)^{0.4446673} Z_t$$





### 3. Identificación de la componente de corto plazo



		EACF										
AR/MA	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
0	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	
1	x	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	
2	x	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	
3	x	o	x	o	o	o	o	o	o	o	o	
4	x	x	x	x	o	o	o	o	o	o	o	
5	x	x	x	x	x	o	o	o	o	o	o	
6	x	x	x	x	o	x	o	o	o	o	o	
7	x	x	o	x	o	x	x	o	o	o	o	
8	x	o	x	x	x	o	o	x	o	o	o	
9	x	o	o	x	x	o	o	x	x	o	o	
10	x	x	o	x	x	x	o	x	o	o	o	

### Otros métodos

Selección usando criterios de información, AIC y SIC:  $p=0, q=0$

Selección automática: auto.arima: ARIMA(0,0,0).

## Modelo identificado

$$(1-B)^d Z_t = \theta_0 + a_t \quad (\text{Modelo de Ruido Blanco Fraccional})$$

### Estimación MV del modelo bajo distribución t asimétrica

Mean Model : ARFIMA(0,d,0)  
 Distribution : sstd

#### Optimal Parameters

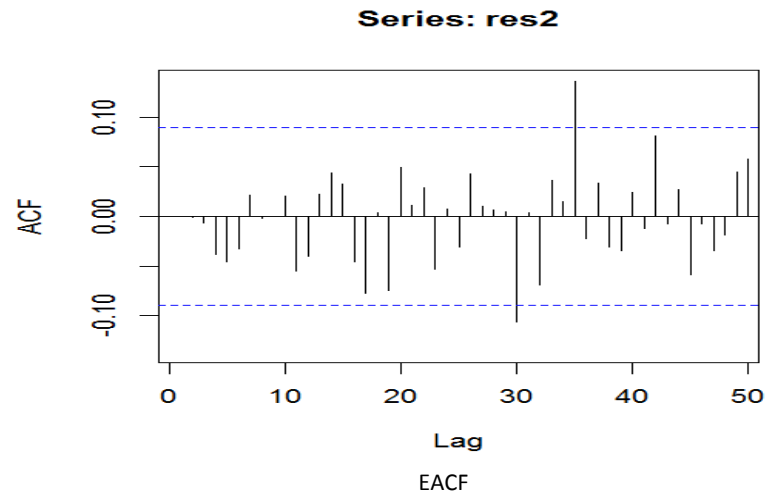
	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
mu	10.97451	0.336261	32.6368	0.0e+00
arfima	0.45480	0.035935	12.6560	0.0e+00
sigma	0.66366	0.039510	16.7974	0.0e+00
skew	1.07925	0.064240	16.8002	0.0e+00
shape	4.68118	1.062325	4.4065	1.1e-05

#### Information Criteria

Akaike	1.9360
Bayes	1.9792
Shibata	1.9358
Hannan-Quinn	1.9530

#### Q-Statistics on Standardized Residuals

	statistic	p-value
Lag[1]	0.01091	0.9168
Lag[p+q+5][5]	1.74965	0.8826
Lag[p+q+12][12]	4.54900	0.9710



AR/MA	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
1	x	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
2	x	x	o	o	o	o	o	o	o	o	o
3	x	x	x	o	o	o	o	o	o	o	o
4	x	x	o	x	o	o	o	o	o	o	o
5	x	x	o	x	x	o	o	o	o	o	o
6	x	o	x	x	o	x	o	o	o	o	o
7	x	x	o	x	o	x	x	o	o	o	o
8	x	x	o	o	o	x	o	o	o	o	o
9	x	x	o	x	x	x	o	o	o	o	o
10	x	x	o	x	x	x	o	x	o	o	o

Mean Model : ARFIMA(5,d,0) sobre la serie de residuales  
 Distribution : sstd

Optimal Parameters

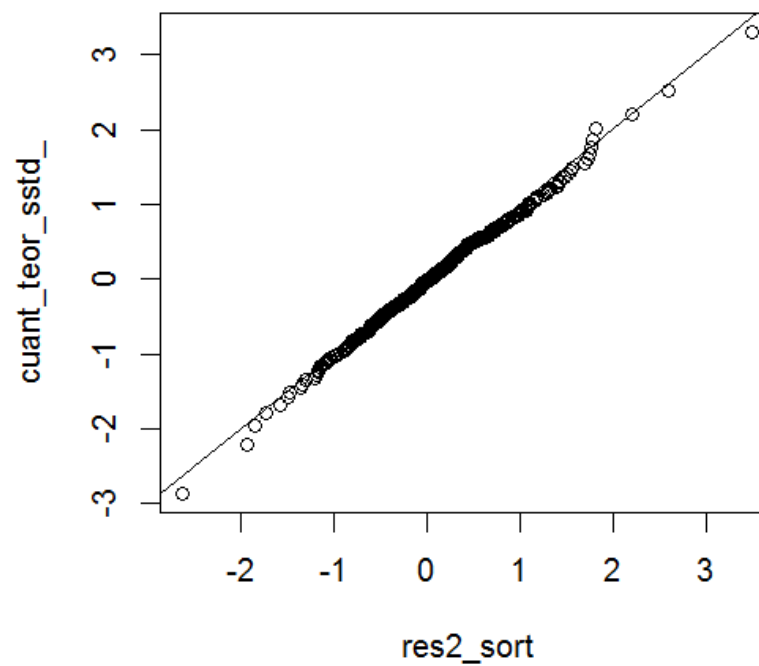
```
-----
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
ar1	-0.014713	0.092048	-0.15984	0.873005
ar2	0.026267	0.056091	0.46829	0.639575
ar3	-0.031299	0.046636	-0.67114	0.502133
ar4	-0.060734	0.047451	-1.27993	0.200570
ar5	-0.014503	0.046708	-0.31049	0.756187
arfima	0.014233	0.081005	0.17571	0.860521
sigma	0.663534	0.041716	15.90592	0.000000
skew	1.087214	0.063395	17.14981	0.000000
shape	4.450274	0.969301	4.59122	0.000004

Q-Statistics on Standardized Residuals

```
-----
```

	statistic	p-value
Lag[1]	0.003879	0.9503
Lag[p+q+1][6]	2.338105	0.1262
Lag[p+q+5][10]	3.210096	0.6676



Two-sample Kolmogorov-Smirnov test

$D = 0.0454$ ,  $p\text{-value} = 0.7006$

alternative hypothesis: two-sided

## ESTABILIDAD DE LOS PARÁMETROS

Nyblom-Hansen stability test

-----  
Joint Statistic: 1.1014

Individual Statistics:

mu 0.18901

arfima 0.20580

sigma 0.22371

skew 0.29730

shape 0.09321

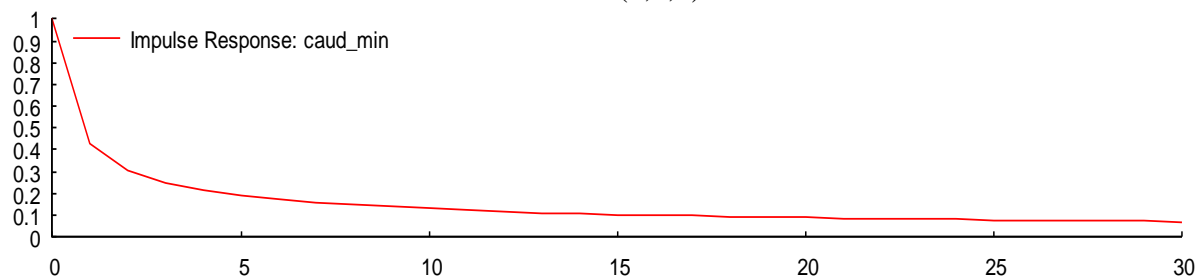
Asymptotic Critical Values (10% 5% 1%)

Joint Statistic: 1.28 1.47 1.88

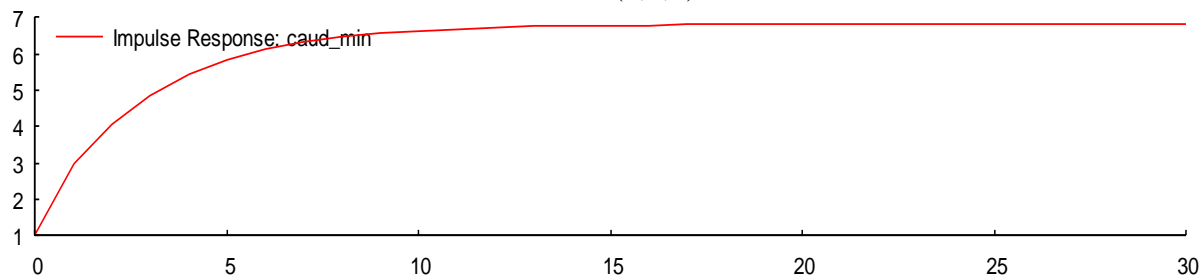
Individual Statistic: 0.35 0.47 0.75

## Función Impulso-Respuesta

ARFIMA(0,d,0)



ARIMA(1,1,2)



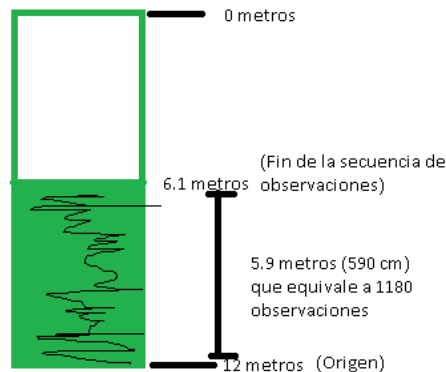


# Aplicaciones

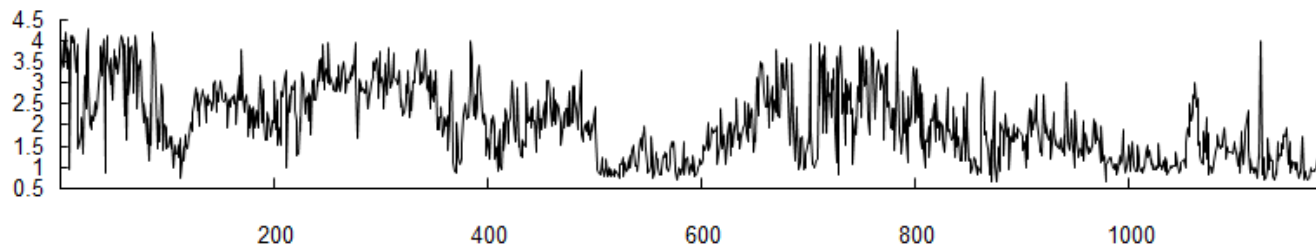
## 2. Serie de datos de microfluorescencia de rayos X del hierro en el páramo de Frontino (Colombia).

Los sedimentos que se depositan en los páramos preservan información sobre los cambios ambientales en el pasado. Del análisis de los sedimentos del páramo de Frontino se puede analizar los efectos climáticos, la distribución de elementos químicos, los registros biológicos y la perturbación del ambiente por los humanos.

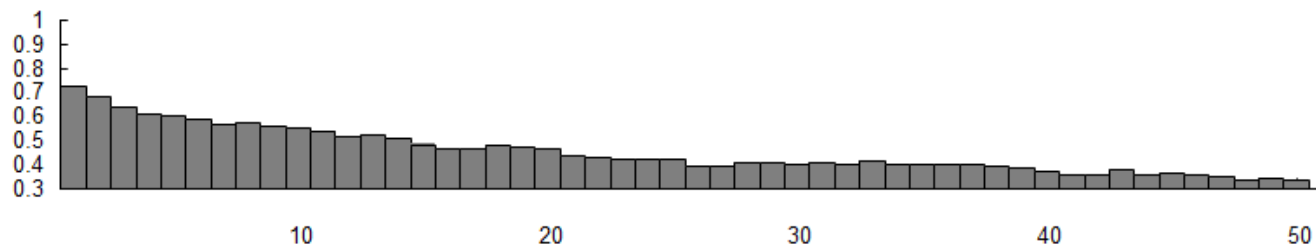
Se consideró la serie de datos de concentración de hierro, medida cada medio centímetro en la parte final de un núcleo extraído en el páramo de Frontino. La longitud del núcleo fue de 12 metros y se analizaron los 5.9 metros del final del núcleo.



Z



ACF



## Etapa de identificación

### 1. Estimación preliminar de $d$

Gaussian Likelihood

ARFIMA(6,  $d$ , 0)

Estimación MV del modelo bajo distribución Normal

	Estimate	Std. Err.	t Ratio	p-Value
Intercept	2.13894	0.79163	2.702	0.007
ARFIMA $d$	0.59123	0.06735	8.778	0.000
AR1	-0.22952	0.08277	-2.773	0.006
AR2	-0.08226	0.06625	-1.242	0.215
AR3	-0.05273	0.05056	-1.043	0.297
AR4	-0.07246	0.043	-1.685	0.092
AR5	-0.02627	0.03966	-0.662	0.508
AR6	-0.01082	0.03506	-0.309	0.758
Error Variance <sup>(1/2)</sup>	0.53893	0.0169	-----	-----

Schwarz Criterion = 971.919

Residual Skewness = 0.2146

Hannan-Quinn Criterion = 957.713

Residual Kurtosis = 5.5499

Akaike Criterion = 949.112

Jarque-Bera Test=327.053 {0}

Box-Pierce (residuals):  $Q(6)=3.5521$  {0.737}

Skewed Student's t Likelihood

ARFIMA(6,d,0)

	Estimate	Std. Err.	t Ratio	p-Value
Student's t d.f. <sup>(1/2)</sup>	1.99241	0.1334	-----	-----
Log(Skewness) (ln(ksi))	0.10512	0.03613	2.909	0.004
Intercept	3.5488	1.5033	2.361	0.018
ARFIMA d	0.69138	0.09622	7.185	0
AR1	-0.28121	0.10984	-2.56	0.011
AR2	-0.10723	0.09218	-1.163	0.245
AR3	-0.09051	0.06632	-1.365	0.173
AR4	-0.07929	0.05877	-1.349	0.178
AR5	-0.0294	0.04796	-0.613	0.54
AR6	-0.01114	0.0393	-0.283	0.777
Error Variance <sup>(1/2)</sup>	0.56418	0.0256	-----	-----

Schwarz Criterion = 918.539

Residual Skewness = 0.0391

Hannan-Quinn Criterion = 901.175

Residual Kurtosis = 6.0858

Akaike Criterion = 890.664

Jarque-Bera Test = 466.081 {0}

Ljung-Box (residuals): Q(6)=9.9182 {0.128}  
 Q(18)=21.4784 {0.256}  
 Q(30)=32.2782 {0.355}

Two-sample Kolmogorov-Smirnov test

D = 0.0392, p-value = 0.3278

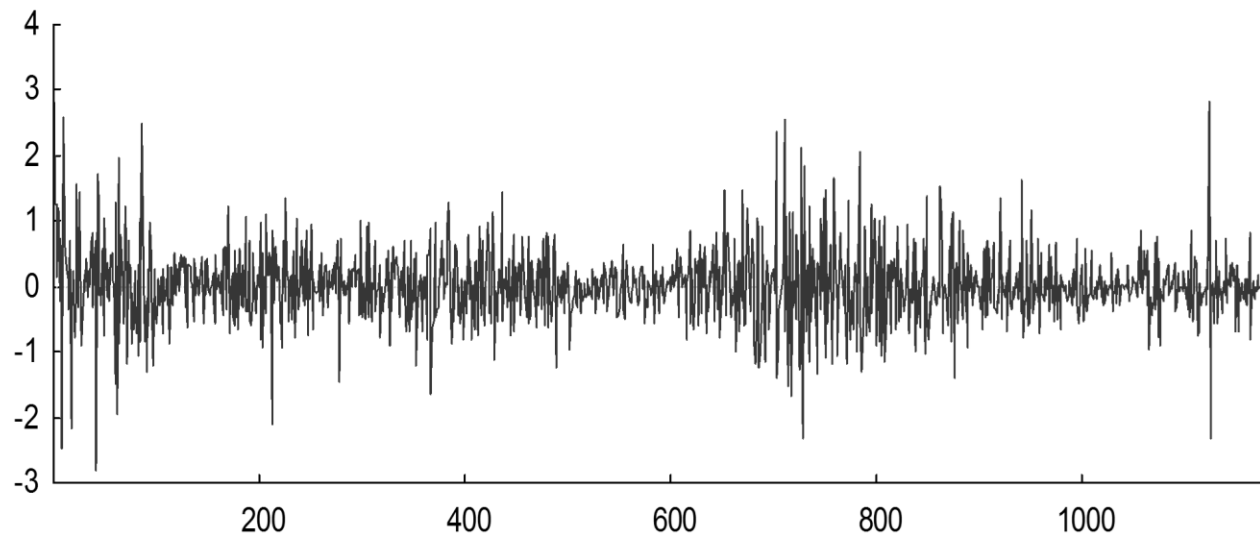
alternative hypothesis: two-sided

Z parece ser no estacionaria



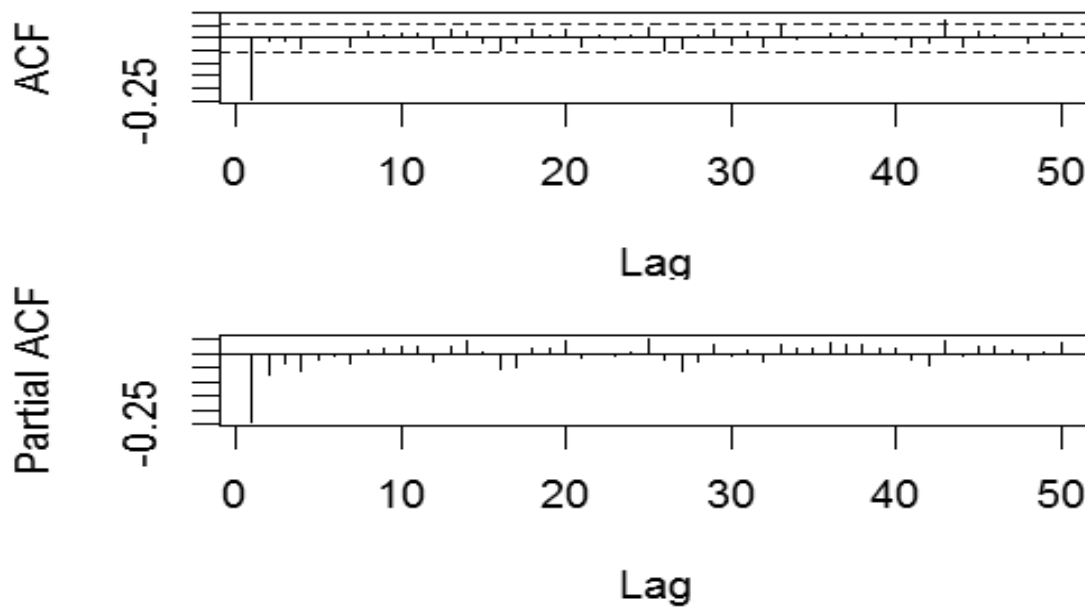
## 2. Diferenciación fraccional

$$W_t = (1-B)^{0.68164} Z_t$$



Identificación de la componente de corto plazo

### Series: FD0.68164\_Z



## EACF

AR/MA	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	x	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
1	x	x	o	o	o	o	o	o	o	o	o
2	x	x	x	x	o	o	o	o	o	o	o
3	x	x	x	x	o	o	o	o	o	o	O
4	x	o	x	o	o	o	o	o	o	o	O
5	x	o	x	x	o	o	o	o	o	o	O
6	x	x	x	x	x	x	x	o	o	o	O
7	o	x	x	x	x	x	o	o	o	o	O

## Selección usando Criterios de Información

Mod	p_	q_	P_	Q_	AIC	SIC
2	0	1	0	0	1.674424	1.683023
7	1	1	0	0	1.673382	1.686280
3	0	2	0	0	1.674386	1.687284
12	2	1	0	0	1.672784	1.689981
8	1	2	0	0	1.673179	1.690376
11	2	0	0	0	1.678125	1.691024
4	0	3	0	0	1.673985	1.691182
6	1	0	0	0	1.683255	1.691853
5	0	4	0	0	1.673505	1.695002
16	3	0	0	0	1.677831	1.695028
9	1	3	0	0	1.674241	1.695738
17	3	1	0	0	1.674450	1.695947
13	2	2	0	0	1.674467	1.695964
21	4	0	0	0	1.675214	1.696710
22	4	1	0	0	1.675013	1.700809
10	1	4	0	0	1.675194	1.700990



## Modelo identificado

$$(1-B)^d Z_t = (1-\theta B)a_t$$

**Estimación MV del modelo bajo distribución t asimétrica**

Skewed Student's t Likelihood

ARFIMA(0,1+d\*,1)

	Estimate	Std. Err.	t Ratio	p-Value
Student's t d.f.^(1/2)	1.99336	0.1301	-----	-----
Log(Skewness) (ln(ksi))	0.12386	0.03536	3.503	0
ARFIMA d*	-0.40574	0.04219	-9.617	0
MA1	0.18234	0.06614	2.757	0.006
Error Variance^(1/2)	0.5682	0.026	-----	-----
Schwarz Criterion = 903.54		Residual Skewness =	0.0204	
Hannan-Quinn Criterion = 895.64		Residual Kurtosis =	5.9877	
Akaike Criterion = 890.859		Jarque-Bera Test =	438.593 {0}	

Box-Pierce (residuals): Q(6)=10.4145 {0.108}  
 Q(18)=22.009 {0.232}  
 Q(30)=33.7689 {0.290}

Two-sample Kolmogorov-Smirnov test

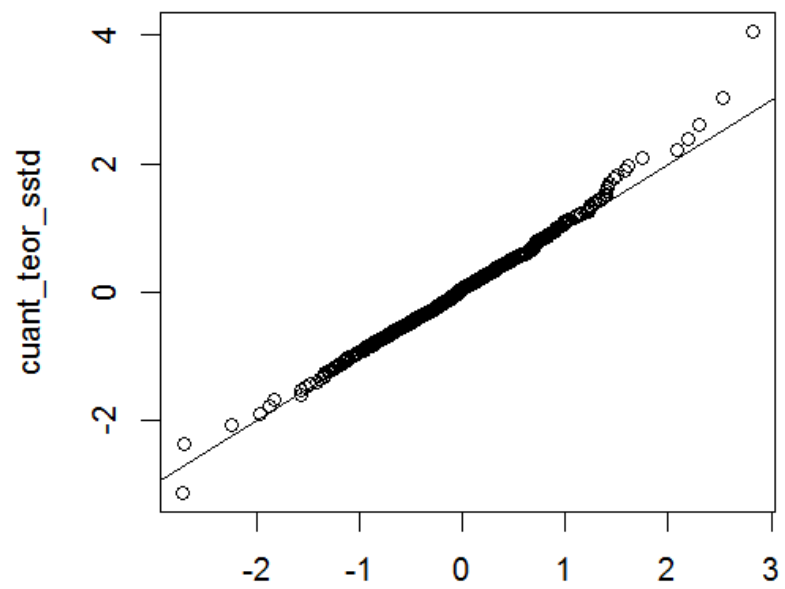
D = 0.045, p-value = 0.1845

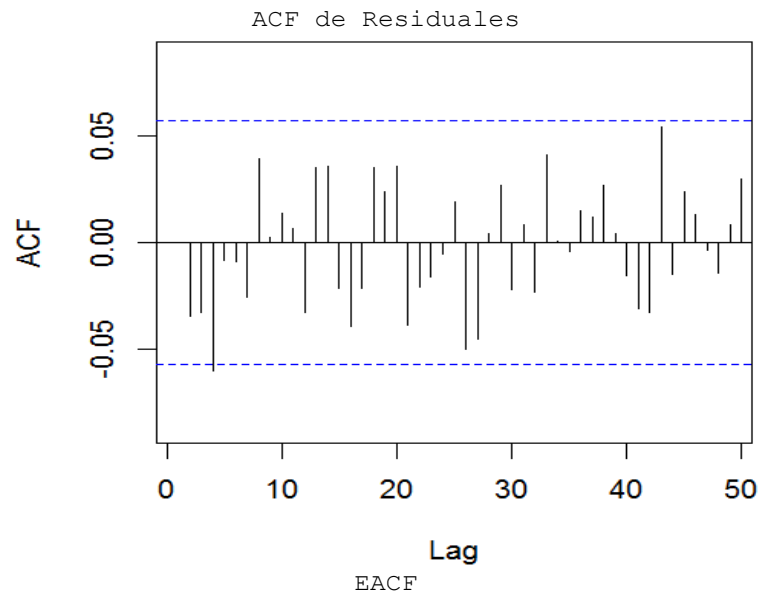
alternative hypothesis: two-sided

Estimación final de d

$$\hat{d}=1+(-0.40574)= 0.59426$$

Q-Q Plot distribución t asimétrica  
para los residuales





AR/MA	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	o	o	o	x	o	o	o	o	o	o	o
1	x	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
2	x	x	o	o	o	o	o	o	o	o	o
3	x	x	x	o	o	o	o	o	o	o	o
4	x	x	x	x	o	o	o	o	o	o	o
5	x	x	x	x	x	o	o	o	o	o	o
6	x	x	x	x	x	o	o	o	o	o	o
7	x	x	x	x	x	x	x	o	o	o	o

## Prueba de Estabilidad de los parámetros

Nyblom-Hansen Stability Test: NH(5) = 4.1152 {<0.01}

Individual NH-Tests:

ARFIMA d = 0.1549 {<1}

MA1 = 0.0946 {<1}

Variance<sup>^(1/2)</sup> = 1.9195 {<0.01}

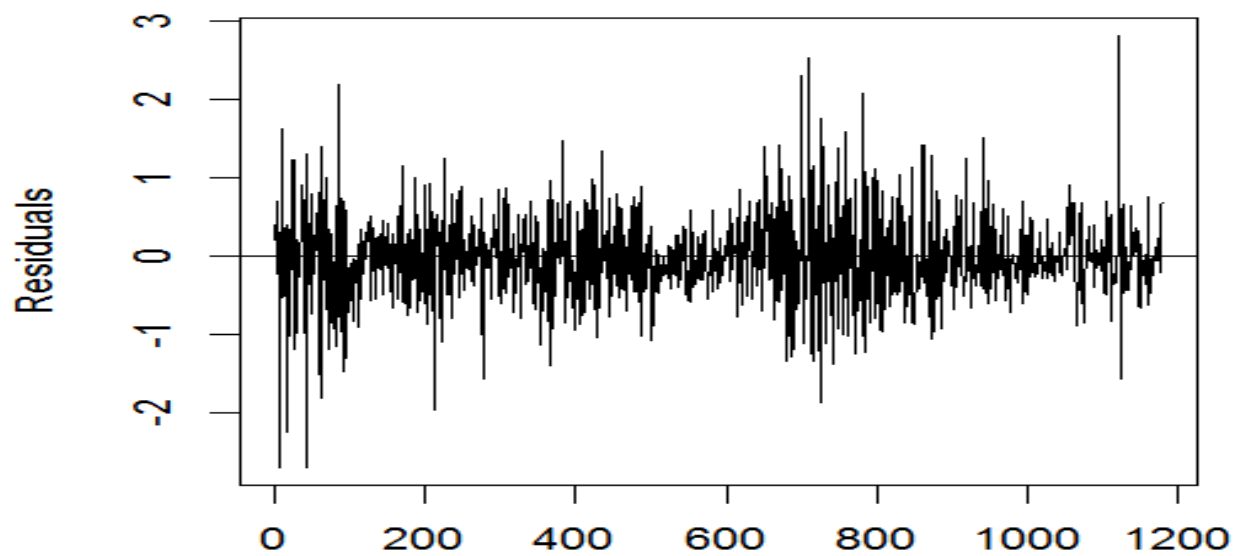
Studt d.f.<sup>^(1/2)</sup> = 1.7346 {<0.01}

Log(Studt skewness) = 1.5689 {<0.01}

⇒ La prueba conjunta rechaza la estabilidad de los parámetros.

⇒ Las pruebas individuales señalan que parece que la varianza de la innovación no es estable, al igual que los parámetros de la distribución.

Gráfico de los residuales



Prueba de efectos ARCH

McLeod-Li:  $Q(6)=82.4989$  {0}

$Q(12)=150.61$  {0}

$Q(31)=330.472$  {0}

Parece que existe heterocedasticidad condicional autorregresiva

# Conclusiones

- La integración fraccional toma cada vez más importancia en la literatura de series de tiempo, debido a que proporciona una alternativa más flexible de investigar la dinámica de una serie, que la dada por los métodos tradicionales de estacionaridad (ARMA) o no estacionaridad (ARIMA).
- Particularmente, permite una modelación flexible del comportamiento en baja frecuencia, con implicaciones importantes en la medición de la persistencia del shock.
- A pesar de la importancia que tiene el valor del parámetro  $d$  sobre la dinámica de la serie de tiempo, es importante observar que la diferenciación fraccional no ha sido considerada en los métodos de extracción de tendencias (Butler, 1992).
- **En muestras finitas**, Geweke y Porter-Hudack (1983), Ray (1993a), Sutcliffe (1994), Tiao y Tsay (1994), Franses y Ooms (1997) y Crato y Ray (1996) no encuentran mejoras sustanciales en la predicción puntual de series reales con memoria larga y sugieren que, en la práctica, los modelos ARIMA pueden competir en **predicción** con los modelos ARFIMA.

# Conclusiones

- Sin embargo, cuando el número de observaciones es elevado y la persistencia es muy fuerte, los modelos ARFIMA presentan mejores predicciones.
- Una de las ventajas fundamentales en la predicción de series con memoria larga está en los intervalos de predicción. Por ejemplo, si  $0 < d < 1$ , los intervalos de predicción basados en modelos ARIMA serían, o bien asintóticamente muy estrechos si se eligiera  $d=0$ , o innecesariamente anchos si se hace  $d=1$ .
- Los modelos ARFIMA también se han extendido a modelos Markov-Switching permitiendo integración fraccional en los estados del proceso (Markov-Switching-ARFIMA process).

⇒ Tsay y Härdle (2007) aplican esta clase de modelos al nivel mínimo anual del caudal del Río Nilo.

- También hay extensión a modelos ARFIMA Estacionales, ARFIMA-GARCH, MS-ARFIMA-GARCH, VARFIMA, Cointegración fraccional.

# Conclusiones

- Programas de cómputo:

⇒ **De libre uso en R:**

fracdiff (Maechler-Reinsen-Lemonte)

arfima (Veenstra-Macleod)

rugarch (Galanos)

afmtools (Contreras- Goerg-Palma)

forecast (Hyndman)

⇒ **De libre uso bajo Ox:**

Arfima Package (Doornik-Ooms)

⇒ **Comercial**

Time Series Modeling (J. Davidson), bajo Ox.



**MUCHAS GRACIAS!**

