Maestría en Ciencias - Matemáticas Aplicadas
Examen de admisión 2017-I

**Sección de Álgebra Lineal.**

En cada caso debe justificar sus afirmaciones. Parte de lo que se evalúa es la forma de razonar.

1. Sea A una matriz real cuadrada de n filas que tiene una factorización LU. Es decir, para A existen matrices L triangular inferior con unos en su diagonal y U triangular superior tales que A = LU. Demuestre:
2. L es invertible.
3. Si A es invertible, entonces U es invertible.
4. Si A es invertible entonces L y U son únicas.
5. Considere el espacio vectorial V compuesto por todas las matrices cuadradas reales de dos filas con la suma y el producto por escalar usuales. Sea W el subconjunto de V compuesto por las matrices de la forma .
6. Demuestre que W es un subespacio de V.
7. Encuentre la dimensión de W por medio del conteo de elementos en una base del subespacio.
8. Para resolver este ejercicio conviene tener a la mano el siguiente teorema y la siguiente definición.

**Teorema espectral**: Sea A una matriz real cuadrada. Entonces A es simétrica si y solo si es ortogonalmente diagonalizable.

**Definición**: Una matriz simétrica real de n filas se denomina definida positiva si para todo vector X no nulo de Rn, se cumple XTAX>0.

**Ejercicio**: Sea A una matriz real simétrica. Demuestre que A es definida positiva si y solo si todos los valores propios de A son números reales positivos.

**Sección de Cálculo**

**Ejercicio 1:** Las mareas son fenómenos con periodo 24 horas y se pueden modelar mediante funciones seno o coseno. Sea *h = f(t)* la altura en metros de la superficie del agua sobre un punto de referencia dado, en función del tiempo t en horas, con *t = 0* a la media noche.

1. Halle una fórmula para *f(t)* si se sabe que la marea más alta, de *1.2 m*, ocurre a las *2 AM*, y la más baja es de *80 cm* por debajo del punto de referencia.
2. Sea ahora *h*´ la altura en metros de la superficie del agua sobre un punto de referencia *20 cm* por encima del punto de referencia de la parte (a) y s el tiempo en horas, con *s = 0* al medio día.

**Ejercicio 2:** Un tanque tiene forma de cono circular invertido con altura de 10 m y radio de base 4 m. Está lleno de agua a una altura de 8 m. Encuentre el trabajo necesario para vaciar el tanque al bombear toda el agua a la parte superior del tanque.

**Ejercicio 3:** Sea S la parte del cono debajo del plano , orientada de tal forma que la componente en *k* del vector normal a *S* es positiva en cada punto. Calcule

,

donde .

**Ejercicio 4:** Encuentre los valores máximos y mínimos de la función *f* definida por *f(x, y) =x2+ 8y2* en la región cerrada y acotada dada por *}*.