Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín
Posgrados en Matemáticas
Admisión Semestre 2019-02
Prueba de Conocimientos

Primera Parte: Álgebra lineal

1. Sea V = {f | f : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ el espacio vectorial de las funciones reales definidas en $\mathbb{R}$ con las operaciones

   +: VxV → V, $\bullet$: $\mathbb{R}\mathrm{x}\mathrm{V} \rightarrow$ V, definidas para todas f,g ϵ V y $\lambda \; \epsilon \; \mathbb{R}$

   por

   (f+g)(x) = f(x) + g(x), (λ • f)(x) = λ • f(x) para todo x ϵ $\mathbb{R}$.

   Con dos valores reales fijos y distintos a,b ϵ $\mathbb{R}$, $\mathrm{a} \neq \mathrm{b}$ se definen los subconjuntos

   W_1={f ϵ V | f(b) = 4•f(a)}, W_2={f ϵ V | f(b) •f(a) = 0}.

   Demuestre si las afirmaciones siguientes son verdaderas o falsas:
   a) W_1 es un sub-espacio vectorial de V.
   b) W_2 es un sub-espacio vectorial de V.

2. Sea A una matriz cuadrada con *n* filas y con elementos reales dada en la forma

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & O \end{pmatrix},$$

donde *B* es una matriz con *a* filas y *b* columnas ($a,b \in \mathbb{N},\ 0 \leq a,b \leq n$) y O es la matriz nula con *n-a* filas y *n-b* columnas.

a) Encuentre el número *f* de filas y el número *c* de columnas de la matriz D.

b) Demuestre: Rango(C)$\leq a$.

c) Demuestre: Si $c<f$, entonces Rango(A) < n.

3. Sea *A* una matriz cuadrada de *n* filas, con entradas reales, y sean *f,g*: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dos transformaciones lineales del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ dadas por *f*(*x*) = *Ax*, *g*(*x*) = $A^T x$. (Los elementos de $\mathbb{R}^n$ se entienden como vectores columna.) En $\mathbb{R}^n$ se define la relación $\perp$ por:

$$x \perp y \Leftrightarrow x^T y = 0.$$

Para todo subconjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ se define su complemento ortogonal por

$$M^{\perp} = \left\{ y \in \mathbb{R}^n \middle| para\ todo\ x \in M\ se\ cumple\ y \perp x \right\}.$$

a. Demuestre: La relación $\perp$ es simétrica.
b. Demuestre: Para todo subconjunto *N* de $\mathbb{R}^n$ el conjunto $N^{\perp}$ es un sub-espacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.
c. Demuestre: Si *f* posee un vector propio asociado al valor propio $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces también *g* posee un vector propio asociado al valor propio λ.
d. Un sub-espacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ es invariante con respecto a una transformación lineal f, si $f(U) \subset U$.
   Demuestre: Si *U* es un sub-espacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, invariante con respecto a la transformación lineal *f*, entonces $U^{\perp}$ es invariante con respecto a la transformación lineal *g*.

Segunda Parte: Cálculo

1. Calcule
$$\lim_{x \to -\infty} x\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right).$$

2. Determine si la siguiente serie es convergente o divergente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1+n^4}} \ .$$

3. Encuentre las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede inscribirse en una circunferencia de radio 1. Utilice algún criterio para probar que las dimensiones encontradas corresponden a la máxima área.

4. Sea S la frontera de la región semiesférica D limitada superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e inferiormente por el plano $z = 0$, orientada con el normal hacia afuera. Encuentre el flujo a través de S del campo vectorial

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(x + z^5,\ y + x^5,\ z + y^5\right).$$