Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín
Posgrados en Matemáticas
Admisión Semestre 2020-01
Prueba de Conocimientos

Primera Parte: Álgebra lineal

1. Sean $u = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $v = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Halle dos vectores $w,\ z \in \boldsymbol{R}^4$ tales que el conjunto

   $B = \{u,\ v,\ w,\ z\}$ sea una base ortogonal para $\boldsymbol{R}^4$.

2. Sea P_3 el espacio vectorial conformado por los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 3, y sea $T\colon P_3 \to \boldsymbol{R}^2$ la transformación lineal definida por

$$T\big(p(x)\big) = \begin{bmatrix} p(1) \\ p'(1) \end{bmatrix}.$$

   a. Demuestre que el codominio de T coincide con $\boldsymbol{R}^2$.

      (El codominio de T es también conocido como la imagen de T, $Imagen(T)$).

   b. Halle una base para el kernel de T.

      (El subespacio $kernel(T)$ es también conocido como el núcleo de T).

3. Sea $T: V \to W$ una transformación lineal entre dos espacios vectoriales de dimensión finita.
    a. Demuestre que si $\dim(V) < \dim(W)$, entonces T no es sobreyectiva.
    b. Demuestre que si $\dim(W) < \dim(V)$, entonces T no es inyectiva.

4. Sea A una matriz de entradas reales, de tamaño 3×3 cuyos valores propios son

$$\lambda_1 = \frac{-1}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} \quad y \quad \lambda_3 = 1$$

   a. Demuestre que A es invertible.

   b. Halle los valores propios de las matrices $A^{-1}, \; A^2 \; y \; A + 3I$.

   c. Halle el polinomio característico de A^2.

   d. Sean $V_1, \; V_2 \; y \; V_3$ vectores propios no nulos, asociados a los valores propios $\lambda_1, \; \lambda_2 \; y \; \lambda_3$, respectivamente. Sea $x \epsilon \boldsymbol{R}^3$. ¿Qué se puede afirmar acerca del límite $\lim_{n \to \infty} (A^n x)$? (justifique su respuesta)

Segunda Parte: Cálculo

1.

a. Demuestre que

$$x < (1+x)\ln(1+x)$$

para todo $x > 0$.

b. Demuestre que para todo $k \in (1,e)$ la ecuación

$$(1+x)^{1/x} = k$$

posee exactamente una solución $x > 0$.

2. Considere la función $f:[-1,\infty) \to \boldsymbol{R}$ definida por

$$f(x) = \sqrt{1+x}$$

para todo $x \geq -1$. Denote por p_n el polinomio de Taylor de orden n de f alrededor del origen.

a. Determine p_2 y demuestre que

$$p_2(x) \leq f(x) \leq p_2(x) + \frac{x^3}{16}$$

para todo $x \geq 0$.

b. Demuestre que

$$1 + \frac{1}{8} - \frac{1}{56} \leq \int_0^1 \sqrt{1+x^3}dx \leq 1 + \frac{1}{8} - \frac{1}{56} + \frac{1}{160}.$$

3. Calcular el flujo del campo

$$\vec{F}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{sinxz}} + \mathrm{tanz}\right)\vec{j} + y^2\vec{k}$$

a través del semi-elipsoide superior $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 6$, $z \geq 0$, con su normal apuntando hacia arriba.