Universidad Nacional de Colombia - Sede Medellín

Programa de Doctorado en Ciencias Matemáticas
Examen de calificación - álgebra
Octubre de 2015

1. Consideremos $\mathbb{C}[z]$ el espacio vectorial complejo de los polinomios en la variable z, y para cada n, $\mathcal{P}_n \subset \mathbb{C}[z]$ el subespacio de los polinomios de grado menor o igual que n. Consideremos $D\colon \mathbb{C}[z] \to \mathbb{C}[z]$ el operador que asigna a cada polinomio $P(z)$ su polinomio derivado $D(P(z)) = P'(z)$. Finalmente consideremos a, b, c tres constantes complejas cualesquiera y sea $H\colon \mathbb{C}[z] \to \mathbb{C}[z]$ el operador lineal que hace:

$$H(P(z)) = z(1-z)\frac{d^2P(z)}{dz^2} + [c - (a+b+1)z]\frac{dP(z)}{dz} - abP(z)$$

   como operador lineal $H\colon \mathbb{C}[z] \to \mathbb{C}[z]$. Entonces:

   (a) Muestre que para cada natural n, $H(\mathcal{P}_n) \subseteq \mathcal{P}_n$.

   (b) Calcule el determinante de H restringido a $\mathcal{P}_n$ en función de a, b, c, n.

   (c) Fijemos $b = 1$. ¿Para que valores de a la ecuación $H(P(z)) = 0$ tiene una solución que sea un polinomio de grado n?

   (d) Fijemos $b = c = 1$ y $a = -2$. Calcule la forma canónica de Jordan del operador H restringido a $\mathcal{P}_3$.

2. Muestre que $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ es, como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial, isomorfo a $\mathbb{Q}$.

3. Pruebe que no hay grupos simples de orden pqr donde p, q, r son primos no necesariamente distintos.

4. Determine la estructura del grupo abeliano G dado por la presentación

$$\langle a, b, c, d \mid 2a + 3b = 4a = 5c + 11d = 0 \rangle$$