Universidad Nacional de Colombia- Sede Medellín
Posgrado en Matemáticas
EXAMEN DE CALIFICACIÓN DE DOCTORADO. 2016

Algebra

La duración de esta parte del examen es de 3 horas.
Resuelva los siguientes problemas.

1. a. Pruebe que cualquier grupo de orden 255 es cíclico.

   b. Se dice que un grupo es localmente finito si cualquier subgrupo finitamente generado del grupo es finito. Sea G un grupo y H un subgrupo normal de G tal que H y G/H son localmente finitos. Demuestre que G es localmente finito.

2. (a) Pruebe que el grupo abeliano $\mathbb{Q}$ no se puede escribir como $A \oplus B$, para A y B subgrupos no cero.

   (b) Se dice que un R-módulo M es indescomponible no existen R-submódulos $A \neq 0$ y $B \neq 0$ tal que $M = A \oplus B$. Demuestre que si R es un dominio de ideales principales y M es un R-módulo indescomponible y finitamente generado, entonces M es isomorfo a R o a $R/(p^n)$ para algún elemento primo p de R.

3. Un anillo conmutativo se llama un *anillo local* si tienen un único ideal maximal. Sea p un número primo. Pruebe que
$$\mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid p \nmid b \right\}$$
es un anillo local.

4. Si R es un dominio entero que no es un campo y $Q = Frac\,(R)$, el campo de fracciones de R, pruebe que $Hom_R\,(Q, R) = 0$

5. Halle el rango libre de torsión y la sucesión de invariantes del k-espacio vectorial V de dimensión 3 visto como $k[x]$-módulo vía la transformación lineal T definida sobre una base $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ de V por $T(b_1) = b_2$, $T(b_2) = b_3$ y $T(b_3) = 0$.