**Universidad Nacional de Colombia - Sede Medellín**

**Programa de Doctorado en Ciencias Matemáticas**

**Examen de calificación - análisis**

**Octubre de 2015**

1. *a*) Considere el espacio de medida $(\mathbb{R}^n, \mu)$, donde $\mu$ denota la medida de Lesbegue en $\mathbb{R}^n$. Sean $f_1, f_2, ..., f_n...$ funciones medibles no negativas y defina $f := \sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Demuestre que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_n d\mu.$$

   *b*) Suponga que $A \subset \mathbb{R}^n$ con $\mu(A) < \infty$ y sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función medible. Para cada $k \in \mathbb{N}$ defina el conjunto

$$A_k(f) := \{x \in A : |f(x)| \geq k\}.$$

   Pruebe que $f \in L^1(A)$ si y sólo si

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k(f)) < \infty.$$

2. Consideremos el mismo espacio de medida del numeral 1. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ una función medible. Definimos la función $D_f : (0, \infty) \to [0, \infty]$ como sigue,

$$D_f(\lambda) = \mu\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}.$$

   *a*) Demuestre que si $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ es una función diferenciable, creciente y tal que $\phi(0) = 0$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(|f(x)|) d\mu = \int_0^{\infty} \phi'(\lambda) D_f(\lambda) d\lambda. \tag{1}$$

   *b*) Use (1) para probar que

$$||f||_p^p = p \int_0^{\infty} \lambda^{p-1} D_f(\lambda) d\lambda.$$

3. Sea $(X, d_X)$ un espacio métrico y $(Y, d_Y)$ un espacio métrico completo. Suponga que $Z$ es un subconjunto denso de $X$ y que $f : Z \to Y$ es una función que satisface la condición

de Lipschitz con constante $K$. Pruebe que $f$ puede extenderse de manera única a una función $F : X \to Y$ que también satisface la condición de Lipschitz en $X$ con constante de Lipschitz $K$.

4. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la función definida por

$$f(\mathrm{x}) = \|\mathrm{x}\|^k \mathrm{x},$$

con $k > 0$.

*a*) Pruebe que $f$ es una biyección de $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}^n$.

*b*) ¿Para cuáles valores de $k$ es $f$ diferenciable en $\mathrm{x} = 0$? Justifique la respuesta.

*c*) ¿Para cuáles valores de $k$ es $f$ continuamente diferenciable en $\mathbb{R}^n$? Justifique la respuesta.

*d*) ¿Es $f^{-1}$ diferenciable en $\mathrm{x} = 0$? Justifique la respuesta.