UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
Escuela de matemáticas
Doctorado en matemáticas
Examen de calificación en análisis
Abril 2016.

1. Sean (X, d) un espacio métrico compacto y $\{x_n\}$ una sucesión en X que no es convergente. Demuestre que $\{x_n\}$ tiene al menos dos límites subsecuenciales.

2. Sean (X, d_1) y (Y, d_2) espacios métricos y $f : X \longrightarrow Y$. Demuestre que f es continua si y sólo si
$$\partial[f^{-1}(V)] \subseteq f^{-1}(\partial V),$$
para todo conjunto $V \subseteq Y$.

3. Sean $X = (X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y $f \in L^1(X, \mathcal{M}, \mu)$. Demuestre que para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $E \in \mathcal{M}$ y $\mu(E) < \delta$, entonces
$$\int_E |f| \, d\mu < \epsilon.$$

4. Para $0 < c \leq \infty$, sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función Lebesgue medible, no negativa, tal que $\int_{\mathbb{R}} f \, dm = c$. Demuestre que
$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} n \log(1 + f/n) \, dm = c.$$

5. Sea $X = (X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida con la propiedad de que para todo $E \in \mathcal{M}$, $\mu(E) < \infty$ si y sólo si E es un conjunto finito. Demuestre que para r y s tales que $1 \leq r < s \leq \infty$ se tiene que $L^r(X) \subseteq L^s(X)$.

6. Sean $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 y $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ tales que
$$f(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad \text{y} \quad \nabla f(x_0, y_0, z_0)) \neq (0, 0, 0).$$
Sean $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0\}$ y $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$.
Pruebe que existen $\delta > 0$ y $C : (-\delta, \delta) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^1 tales que
(i) $C\big((-\delta, \delta)\big) \subseteq S$,
(ii) $C(0) = (x_0, y_0, z_0)$,
(iii) $C'(0) = v$.