SEMINARIO INSTITUCIONAL DE ESTADÍSTICA

Escuela de Estadística
Universidad Nacional de Colombia - Sede Medellín

La Función de Disponibilidad en Procesos de Renovación y aproximaciones útiles de ella.

Álvaro Calvache Archila
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia-Tunja

14 de marzo de 2016
Medellín

Índice

1. Procesos de Renovación
2. Función de Disponibilidad
3. Aproximaciones

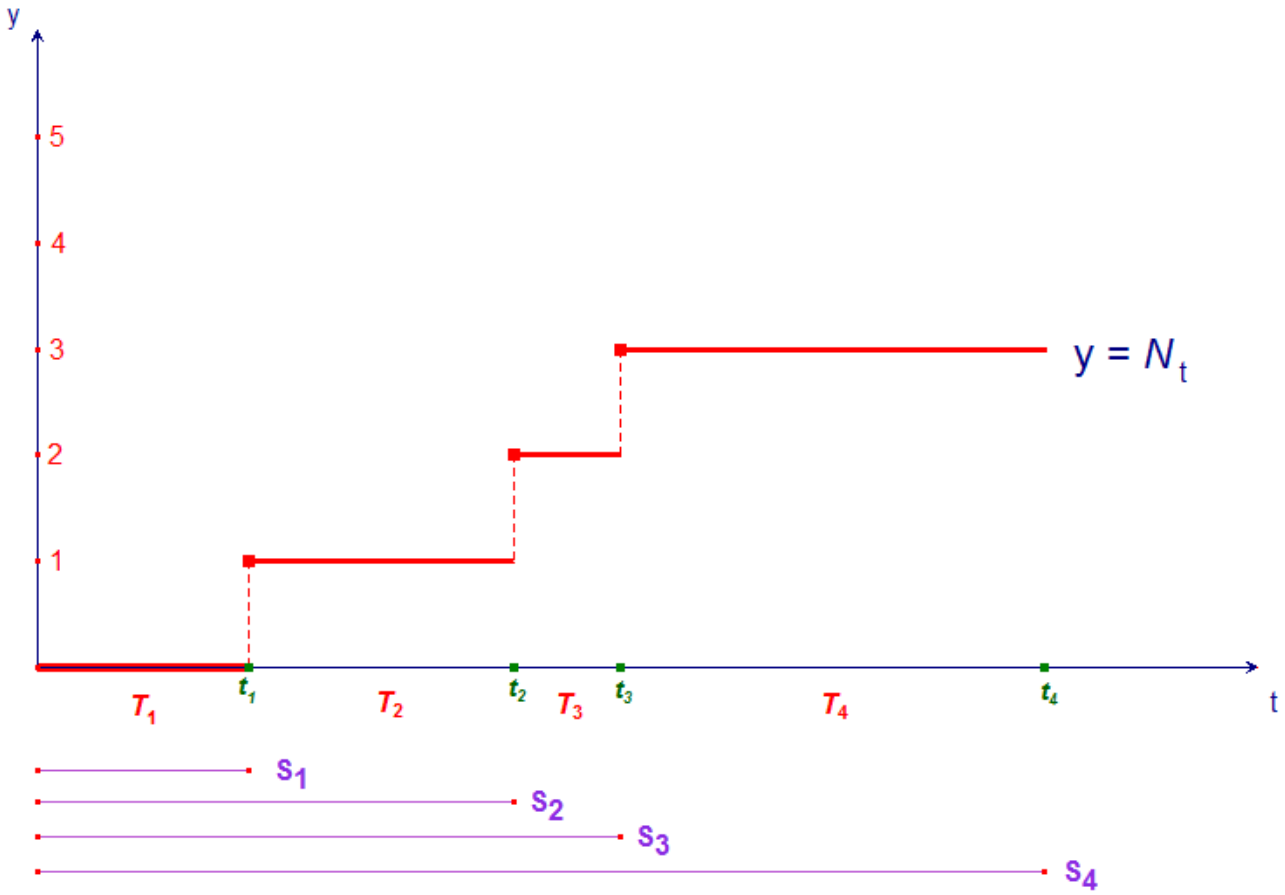
Índice

1. Procesos de Renovación
2. Función de Disponibilidad
3. Aproximaciones

Índice

1. Procesos de Renovación
2. Función de Disponibilidad
3. Aproximaciones

Proceso de renovación $\mathbf{S} = \{S_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n;\ n \in \mathbb{Z}^+\}$.



Proceso de conteo $\{\ N_t;\ t \in \mathbb{R}^+\ \}$ para el proceso de renovación $\mathbf{S}$.

Procesos de Renovación

Definición (Proceso de Renovación)

Sea $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias no negativas, independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución $F_T(t) = P(T_n \leq t)$.
Sea

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} T_i.$$

Al proceso $\{S_n;\, n \in \mathbb{N}\}$ se le llama *Proceso de Renovación* y se nota como $\mathbf{S}$.

Procesos de Renovación

Procesos de Conteo

Definición (Procesos de Conteo)

Sean $\mathbf{S}$ un proceso de renovación y

$$N_t := \max\{n \in \mathbb{Z}^+ \mid S_n \leq t\}.$$

Entonces se dice que $\{N_t; t \geq 0\}$ es el proceso de conteo para el proceso $\mathbf{S}$.

Proposición

Si $t \geq 0$ y $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces,

$$N_t \geq n \iff S_n \leq t. \tag{1}$$

Procesos de Renovación

Procesos de Conteo

Definición (Procesos de Conteo)

Sean $\mathbf{S}$ un proceso de renovación y

$$N_t := \max\{n \in \mathbb{Z}^+ \mid S_n \leq t\}.$$

Entonces se dice que $\{N_t; t \geq 0\}$ es el proceso de conteo para el proceso $\mathbf{S}$.

Proposición

Si $t \geq 0$ *y* $n \in \mathbb{Z}^+$*, entonces,*

$$N_t \geq n \iff S_n \leq t. \tag{1}$$

Procesos de Renovación

Función de Renovación

Definición (Función de Renovación)

Dado un proceso de conteo $\{N_t; t \geq 0\}$, la función de renovación se define como

$$M(t) = E\big[N_t\big].$$

Definición (Función de densidad de Renovación)

Si M es una función diferenciable, la función de densidad de renovación se define como

$$m(t) = \frac{dM}{dt}(t).$$

Procesos de Renovación

Función de Renovación

Definición (Función de Renovación)

Dado un proceso de conteo $\{N_t; t \geq 0\}$, la función de renovación se define como

$$M(t) = E\big[N_t\big].$$

Definición (Función de densidad de Renovación)

Si M es una función diferenciable, la función de densidad de renovación se define como

$$m(t) = \frac{dM}{dt}(t).$$

Procesos de Renovación

Convolución

Proposición

Sean X e Y dos variables aleatorias independientes con funciones de distribución F_X e F_Y, respectivamente. Entonces la función de distribución de su suma es la convolución de F_X y F_Y, es decir,

$$F_{X+Y}(t) = F_X * F_Y(t) = \int_0^t F_X(t-v)\, dF_Y(v).$$

En caso que f_X y f_Y sean las funciones de densidad de X e Y respectivamente, entonces la función de densidad de $X+Y$ es la convolución de f_X y f_Y, es decir,

$$f_{X+Y}(t) = f_X * f_Y(t) = \int_0^t f_X(t-v)\, f_Y(v)\, dv.$$

Procesos de Renovación

Convolución

Proposición

Si $T_1, T_2, \ldots, T_n$ *son iid con función de distribución* F_T*, entonces, la distribución de su suma* $S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$ *es* $F_T^{(n)}$*, la* $n-$*ésima convolución de* F_T*, es decir,*

$$F_{S_n}(t) = F_T^{(n)}(t) = F_T^{(n-1)} * F_T(t) = \int_0^t F_T^{(n-1)}(t-v)\, dF_T(v), \tag{2}$$

en donde $F_T^{(1)}(t) = F_T(t)$*.*

Si las T_i *tienen funciones de densidad* f_T*, entonces, la función de densidad de su suma es*

$$f_T^{(n)}(t) = f_T^{(n-1)} * f_T(t) = \int_0^t f_T^{(n-1)}(t-v)\, f_T(v)\, dv,$$

en donde $f_T^{(1)}(t) = f_T(t)$*.*

Procesos de Renovación

Ecuación fundamental de Renovación

$$
\begin{aligned}
M(t) = E[N_t] &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P_r(N_t = k) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} k \cdot \left[P_r\left(N_t \geq k\right) - P_r\left(N_t \geq k+1\right)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} k \cdot \left[P_r\left(S_k \leq t\right) - P_r\left(S_{k+1} \leq t\right)\right], \text{ por (1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{k=1}^{n} P_r(S_k \leq t) - n\, P_r(S_{n+1}) \leq t)\right] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} P_r(S_k \leq t), \quad \text{y por (2) se tiene que,} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} F_T^{(k)}(t),
\end{aligned}
$$

Procesos de Renovación

Ecuación fundamental de Renovación

$$
\begin{aligned}
M(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} F_T^{(k)}(t) = F_T(t) + \sum_{k=2}^{\infty} F_T^{(k)}(t) \\
&= F_T(t) + \sum_{k=1}^{\infty} F_T^{(k+1)}(t) = F_T(t) + \sum_{k=1}^{\infty} F_T * F_T^{(k)}(t) \\
&= F_T(t) + F_T * \sum_{k=1}^{\infty} F_T^{(k)}(t) = F_T(t) + F_T * M(t).
\end{aligned}
$$

Teorema (Ecuación fundamental de Renovación)

Si $\{S_n = T_1 + \cdots + T_n; n \geq 1\}$ es un proceso de renovación, en donde la distribución de los T_i es F_T, entonces la función de renovación M, satisface la siguiente ecuación

$$M(t) = F_T(t) + \int_0^t M(t-v)\, dF_T(v). \tag{3}$$

Procesos de Renovación

Transformada de Laplace

Notación (Transformada de Laplace)

Si $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, su transformada de Laplace (si existe), se denota y se define como:

$$f^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt.$$

Observación (Ecuación fundamental de Renovación en términos de TL)

$$M^*(s) = \frac{F_T^*(s)}{1 - s\, F_T^*(s)} = \frac{f_T^*(s)}{s\left(1 - f_T^*(s)\right)},$$

$$m^*(s) = \frac{f_T^*(s)}{1 - f_T^*(s)}. \tag{4}$$

Procesos de Renovación

Transformada de Laplace

Notación (Transformada de Laplace)

Si $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, su transformada de Laplace (si existe), se denota y se define como:

$$f^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt.$$

Observación (Ecuación fundamental de Renovación en términos de TL)

$$\begin{aligned} M^*(s) &= \frac{F_T^*(s)}{1 - s\, F_T^*(s)} = \frac{f_T^*(s)}{s\left(1 - f_T^*(s)\right)}, \\ m^*(s) &= \frac{f_T^*(s)}{1 - f_T^*(s)}. \end{aligned} \tag{4}$$

Procesos de Renovación

Aproximaciones

Notación (Momentos de orden n.)

Los momentos de orden n de la variable T, se notarán como:

$$\mu = E\big[T\big], \quad \mu'_n = E\big[T^n\big], \; n = 0, 1, \ldots$$

Por (4) $\; m^*(s) = \dfrac{f_T^*(s)}{1 - f_T^*(s)},$

y notando que $m^*(s)$ tiene una singularidad en $s = 0$, entonces

$$m^*(s) \approx \frac{A}{s} + \frac{B}{s - s_0}, \tag{5}$$

$$m(t) \approx A + B\, e^{t s_0},$$

$$M(t) \approx At - \frac{B\left(1 - e^{t s_0}\right)}{s_0}. \tag{6}$$

Procesos de Renovación

Aproximaciones

Se sabe que

$$f_T^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n s^n}{n!} \mu_n', \text{ entonces,}$$

$$s\,(s-s_0)\,m^*(s) \approx (s-s_0)A + sB, \quad \text{por (5),}$$

$$s\,(s-s_0)\,\frac{f_T^*(s)}{1-f_T^*(s)} \approx (s-s_0)A + sB, \quad \text{por (4),}$$

$$s\,(s-s_0)\,f_T^*(s) \approx [(s-s_0)A + sB]\left[\,1 - f_T^*(s)\,\right], \quad \text{y se obtiene:}$$

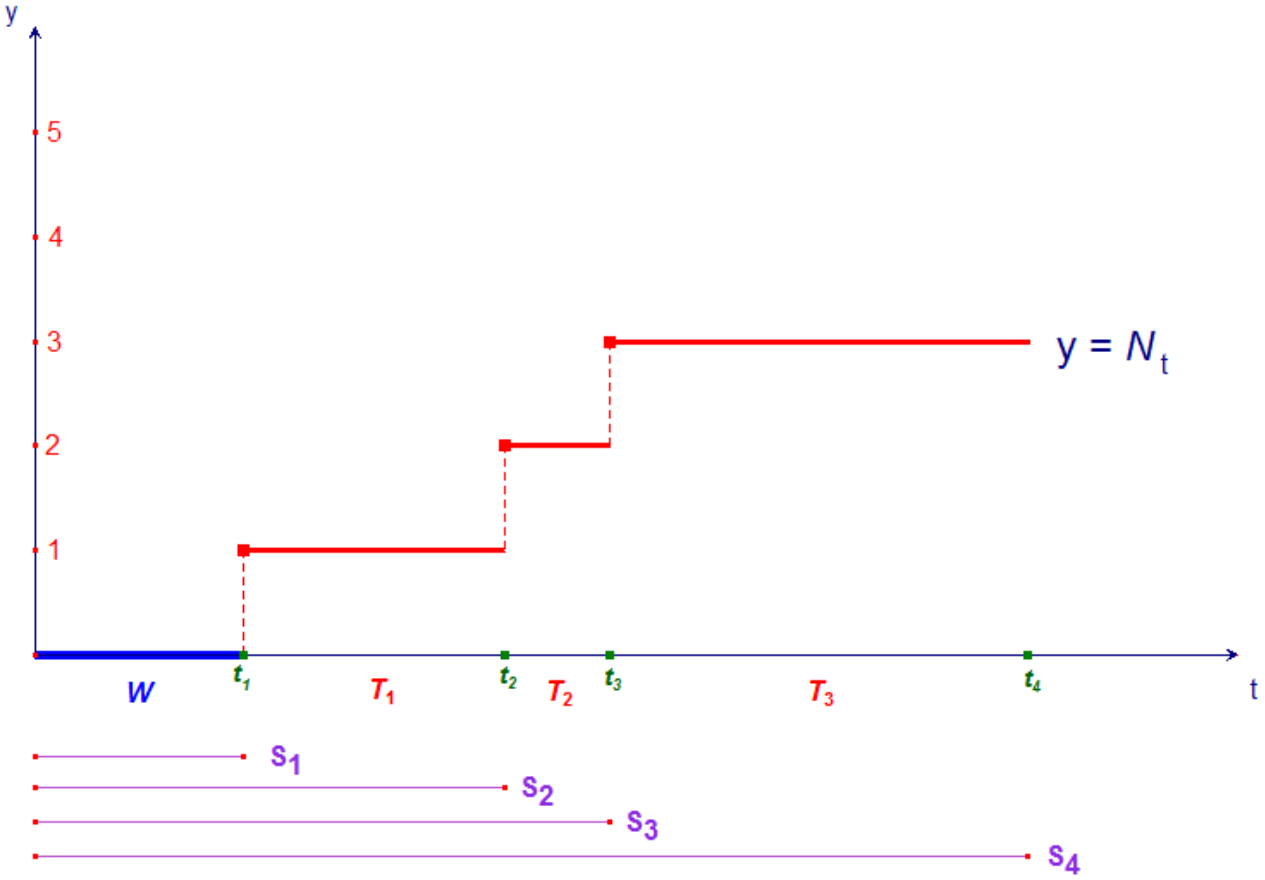
$$A = \frac{1}{\mu},$$

$$B = -s_0\,\frac{\mu_2' - 2\mu^2}{2\mu^2},$$

$$s_0 = -\frac{6\mu\left(\mu_2' - 2\mu^2\right)}{2\mu\mu_3' - 3\mu'^2_2}.$$

Así, $M(t) \approx \dfrac{1}{\mu}t + \dfrac{\mu_2' - 2\mu^2}{2\mu^2}\left(1 - e^{ts_0}\right).$

Proceso de renovación retardado $\mathbf{S} = \{S_n = W + T_1 + T_2 + \cdots + T_n;\ n \in \mathbb{Z}^+\}$.



Proceso de conteo $\{\ N_t;\ t \in \mathbb{R}\ \}$ para el proceso de renovación retardado $\mathbf{S}$.

Procesos de Renovación

Procesos de Renovación retardados

Si $\{S_n = W + T_1 + \cdots + T_n; n \geq 1\}$ es un proceso de renovación retardado, en donde la distribución de los T_i es F_T y la distribución de W es F_W, entonces,

$$\begin{aligned} M(t) =& F_W(t) + \int_0^t M(t-v)\, dF_T(v), \\ m(t) =& f_W(t) + \int_0^t m(t-v)\, f_T(v)\, dv, \\ M^*(s) =& \frac{F_W^*(s)}{1 - s\, F_T^*(s)} = \frac{f_W^*(s)}{s\left(1 - f_T^*(s)\right)}, \\ m^*(s) =& \frac{f_W^*(s)}{1 - f_T^*(s)}. \end{aligned} \tag{7}$$

Función de Disponibilidad

Conteos de fallas y reparaciones

Notación

i. $\{U_n\}_{n\geq 1}$ *indica los tiempos de actividad sucesivas del componente.*

Se suponen independientes e idénticamente distribuidas con distribución F_U.

ii. $\{D_n\}_{n\geq 1}$ *son los correspondientes tiempos de inactividad del componente.*

Se suponen independientes e idénticamente distribuidas con distribución F_D.

Además se supone que U_j *es independiente de* D_i, *para todo* $i,\ j \in \mathbb{Z}^+$.

iii. $N_U(t) =$ *Número de fallas que ocurren hasta el tiempo* t.

iv. $N_D(t) =$ *Número de reparaciones finalizadas hasta el tiempo* t.

v. $M_U(t) = E\big[N_U(t)\big]$, *Renovación de fallas hasta el tiempo* t.

vi. $M_D(t) = E\big[N_D(t)\big]$, *Renovación de reparaciones hasta el tiempo* t.

Función de Disponibilidad

Conteos de fallas y reparaciones

Notación

i. $\{U_n\}_{n\geq 1}$ *indica los tiempos de actividad sucesivas del componente.*

Se suponen independientes e idénticamente distribuidas con distribución F_U.

ii. $\{D_n\}_{n\geq 1}$ *son los correspondientes tiempos de inactividad del componente.*

Se suponen independientes e idénticamente distribuidas con distribución F_D.

Además se supone que U_j *es independiente de* D_i, *para todo* $i,\ j \in \mathbb{Z}^+$.

iii. $N_U(t) =$ *Número de fallas que ocurren hasta el tiempo* t.

iv. $N_D(t) =$ *Número de reparaciones finalizadas hasta el tiempo* t.

v. $M_U(t) = E\big[N_U(t)\big]$, *Renovación de fallas hasta el tiempo* t.

vi. $M_D(t) = E\big[N_D(t)\big]$, *Renovación de reparaciones hasta el tiempo* t.

Función de Disponibilidad

Conteos de fallas y reparaciones

Notación

i. $\{U_n\}_{n\geq 1}$ *indica los tiempos de actividad sucesivas del componente.*

Se suponen independientes e idénticamente distribuidas con distribución F_U.

ii. $\{D_n\}_{n\geq 1}$ *son los correspondientes tiempos de inactividad del componente.*

Se suponen independientes e idénticamente distribuidas con distribución F_D.

Además se supone que U_j *es independiente de* D_i, *para todo* $i,\ j \in \mathbb{Z}^+$.

iii. $N_U(t) =$ *Número de fallas que ocurren hasta el tiempo* t.

iv. $N_D(t) =$ *Número de reparaciones finalizadas hasta el tiempo* t.

v. $M_U(t) = E\big[N_U(t)\big],$ *Renovación de fallas hasta el tiempo* t.

vi. $M_D(t) = E\big[N_D(t)\big],$ *Renovación de reparaciones hasta el tiempo* t.

Función de Disponibilidad

Conteos de fallas y reparaciones

Notación

i. $\{U_n\}_{n\geq 1}$ *indica los tiempos de actividad sucesivas del componente.*

Se suponen independientes e idénticamente distribuidas con distribución F_U.

ii. $\{D_n\}_{n\geq 1}$ *son los correspondientes tiempos de inactividad del componente.*

Se suponen independientes e idénticamente distribuidas con distribución F_D.

Además se supone que U_j *es independiente de* D_i, *para todo* $i,\ j \in \mathbb{Z}^+$.

iii. $N_U(t) =$ *Número de fallas que ocurren hasta el tiempo* t.

iv. $N_D(t) =$ *Número de reparaciones finalizadas hasta el tiempo* t.

v. $M_U(t) = E\big[N_U(t)\big]$, *Renovación de fallas hasta el tiempo* t.

vi. $M_D(t) = E\big[N_D(t)\big]$, *Renovación de reparaciones hasta el tiempo* t.

Función de Disponibilidad

Conteos de fallas y reparaciones

Notación

i. $\{U_n\}_{n\geq 1}$ *indica los tiempos de actividad sucesivas del componente.*

Se suponen independientes e idénticamente distribuidas con distribución F_U.

ii. $\{D_n\}_{n\geq 1}$ *son los correspondientes tiempos de inactividad del componente.*

Se suponen independientes e idénticamente distribuidas con distribución F_D.

Además se supone que U_j *es independiente de* D_i, *para todo* $i,\ j \in \mathbb{Z}^+$.

iii. $N_U(t) =$ *Número de fallas que ocurren hasta el tiempo* t.

iv. $N_D(t) =$ *Número de reparaciones finalizadas hasta el tiempo* t.

v. $M_U(t) = E\big[N_U(t)\big]$, *Renovación de fallas hasta el tiempo* t.

vi. $M_D(t) = E\big[N_D(t)\big]$, *Renovación de reparaciones hasta el tiempo* t.

Función de Disponibilidad

Conteos de fallas y reparaciones

Notación

i. $\{U_n\}_{n\geq 1}$ *indica los tiempos de actividad sucesivas del componente.*

Se suponen independientes e idénticamente distribuidas con distribución F_U.

ii. $\{D_n\}_{n\geq 1}$ *son los correspondientes tiempos de inactividad del componente.*

Se suponen independientes e idénticamente distribuidas con distribución F_D.

Además se supone que U_j *es independiente de* D_i, *para todo* $i,\ j \in \mathbb{Z}^+$.

iii. $N_U(t) =$ *Número de fallas que ocurren hasta el tiempo* t.

iv. $N_D(t) =$ *Número de reparaciones finalizadas hasta el tiempo* t.

v. $M_U(t) = E\big[N_U(t)\big],$ *Renovación de fallas hasta el tiempo* t.

vi. $M_D(t) = E\big[N_D(t)\big],$ *Renovación de reparaciones hasta el tiempo* t.

Función de Disponibilidad

Conteos de fallas y reparaciones

Notación

i. $\{U_n\}_{n\geq 1}$ *indica los tiempos de actividad sucesivas del componente.*

Se suponen independientes e idénticamente distribuidas con distribución F_U.

ii. $\{D_n\}_{n\geq 1}$ *son los correspondientes tiempos de inactividad del componente.*

Se suponen independientes e idénticamente distribuidas con distribución F_D.

Además se supone que U_j *es independiente de* D_i, *para todo* $i,\ j \in \mathbb{Z}^+$.

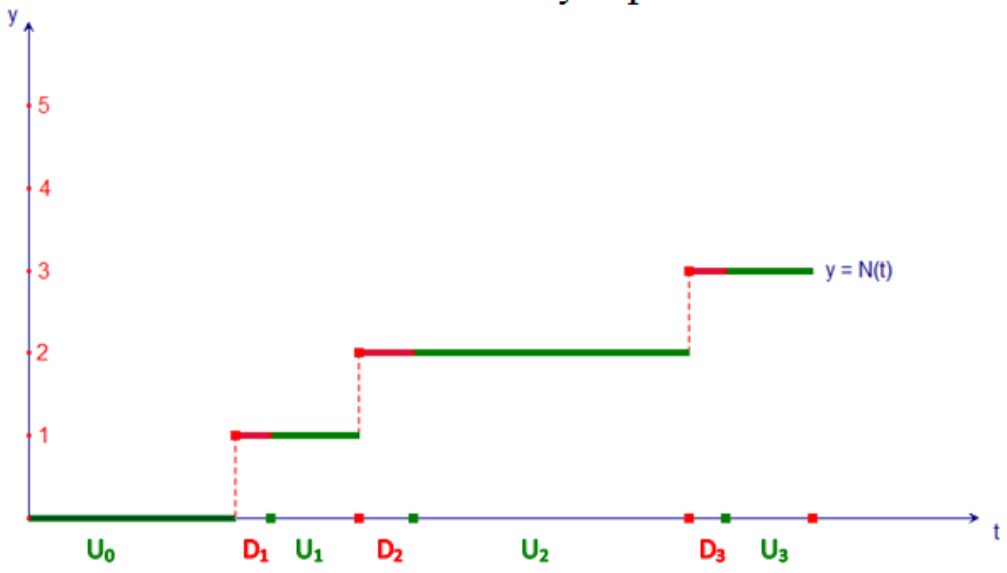
iii. $N_U(t) =$ *Número de fallas que ocurren hasta el tiempo* t.

iv. $N_D(t) =$ *Número de reparaciones finalizadas hasta el tiempo* t.

v. $M_U(t) = E\big[N_U(t)\big],$ *Renovación de fallas hasta el tiempo* t.

vi. $M_D(t) = E\big[N_D(t)\big],$ *Renovación de reparaciones hasta el tiempo* t.

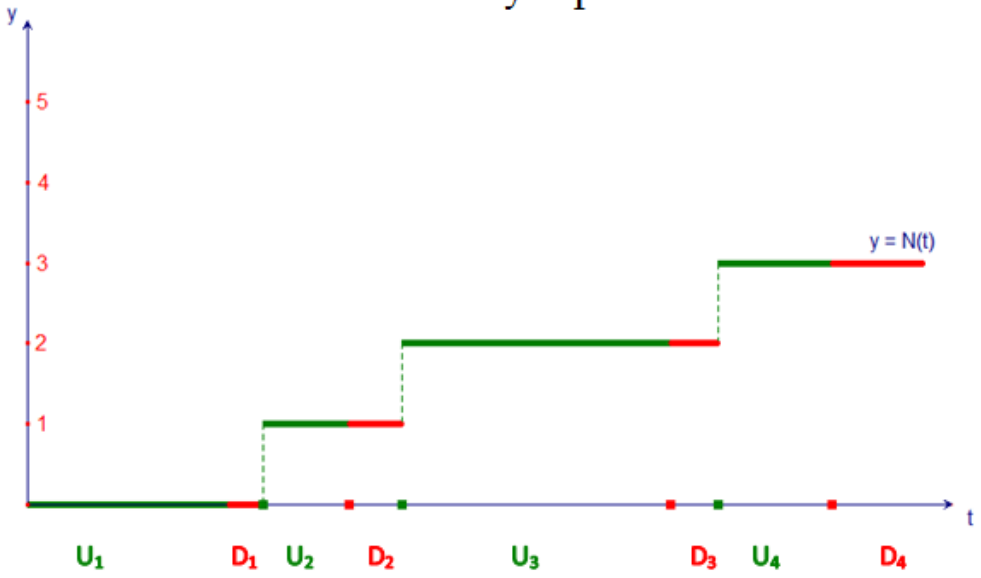
Proceso de falla y reparación.



Procesos de conteo $\{N_U(t); t \geq 0\}$ del número de fallas.

$$M_U(t) = F_U(t) + \int_0^t M_U(t-v)\, dF_{U+D}, \quad \text{por (7).}$$

Proceso de falla y reparación.



Procesos de conteo $\{N_D(t); t \geq 0\}$ del número de reparaciones finalizadas.

$$M_D(t) = F_{U+D}(t) + \int_0^t M_D(t-v)\, dF_{U+D}, \quad \text{por (3).}$$

Función de Disponibilidad

Definición (Función de Disponibilidad)

Se define

$$X(t) = \begin{cases} 1, & \text{si en el instante } t \text{ el componente está en funcionamiento,} \\ 0, & \text{si en el instante } t \text{ el componente está siendo reparado.} \end{cases}$$

La función de disponibilidad en un tiempo t se define como

$$A(t) := P_r\big(X(t) = 1\big).$$

Función de Disponibilidad

Propiedades

Observación

$$X(t) = 1 \Leftrightarrow N_D(t) = N_U(t).$$
$$X(t) = 0 \Leftrightarrow N_D(t) = N_U(t) - 1.$$

Luego,
$$\begin{aligned} M_U(t) - M_D(t) &= E\big[N_U(t) - N_D(t)\big] \\ &= E\left[N_U(t) - N_D(t)\middle|X(t) = 1\right] \; P_r\big(X(t) = 1\big) \\ &\quad + E\left[N_U(t) - N_D(t)\middle|X(t) = 0\right] \; P_r\big(X(t) = 0\big) \\ &= P_r\big(X(t) = 0\big) = 1 - A(t). \end{aligned}$$

Así, $$A(t) = 1 + M_D(t) - M_U(t). \tag{8}$$

Función de Disponibilidad

Ecuación de disponibilidad

Observación

$$
\begin{aligned}
A(t) &= 1 + M_D(t) - M_U(t) \\
&= 1 + F_{U+D}(t) + \int_0^t M_D(t-v)\, dF_{U+D}(v) \\
&\quad - F_U(t) - \int_0^t M_U(t-v)\, dF_{U+D}(v) \\
&= 1 + F_{U+D}(t) - F_U(t) + \int_0^t \left[M_D(t-v) - M_U(t-v)\right] dF_{U+D}(v) \\
&= 1 + F_{U+D}(t) - F_U(t) + \int_0^t \left[A(t-v) - 1\right] dF_{U+D}(v) \\
&= 1 - F_U(t) + \int_0^t A(t-v)\, dF_{U+D}(v), \text{ o equivalentemente,} \qquad (9)
\end{aligned}
$$

$$
A^*(s) = \frac{1 - f_U^*(s)}{s\left(1 - f_{U+D}^*(s)\right)}. \qquad (10)
$$

Notación

Sea $Z = U + D$.
Para $i = U, D$ *y* Z *se tiene que:*

- f_i *es la función de densidad de la variable* i.
- F_i *es la función de distribución de la variable* i.
- $\overline{F_i}$ *es la función de supervivencia de la variable* i.
- μ'_{ji} *es el momento j-ésimo de la variable* i, *es decir,*

$$\mu'_{ji} = E\left[i^j\right]$$

.

Aproximaciones

Aproximación 1

Proposición

Supóngase que los dos primeros momentos μ'_{1U} y μ'_{2U} del tiempo en funcionamiento U y los dos primeros momentos μ'_{1D} y μ'_{2D} del tiempo en reparación D existen y son conocidos. Entonces, la función de disponibilidad se puede aproximar por

$$A_1(t) = \frac{\mu'_{1U}}{\mu'_{1U} + \mu'_{1D}} + \frac{\mu'_{1D}}{\mu'_{1U} + \mu'_{1D}}\, e^{s_0 t}, \tag{11}$$

en donde

$$s_0 = -\frac{2\,\mu'_{1\,Z}\,\mu'_{1D}}{\mu'_{1U}\,\mu'_{2\,Z} - \mu'_{1\,Z}\,\mu'_{2U}}.$$

Aproximaciones

Aproximación 2

Proposición

Supóngase que los dos primeros momentos μ'_{1U} y μ'_{2U} del tiempo en funcionamiento U y los tres primeros momentos μ'_{1Z}, μ'_{2Z} y μ'_{3Z} del tiempo en funcionamiento y reparación Z existen y son conocidos. Entonces, la función de disponibilidad se puede aproximar por

$$A_2(t) = \frac{2\,{\mu'_{1Z}}^2\, e^{s_1\,t} + 2\,\mu'_{1U}\,\mu'_{1Z}\left(1 - e^{s_2\,t}\right) - \mu'_{2Z}\left(e^{s_1\,t} - e^{s_2\,t}\right)}{2\,{\mu'_{1Z}}^2}, \tag{12}$$

en donde

$$s_1 = -\frac{6\left(\mu'_{2Z} - 2\,{\mu'_{1Z}}^2\right)\mu'_{1Z}}{2\,\mu'_{3Z}\,\mu'_{1Z} - 3\,{\mu'_{2Z}}^2} \quad \textit{y}$$

$$s_2 = -\frac{6\left(\mu'_{2Z} - 2\,\mu'_{1U}\,\mu'_{1Z}\right)\mu'_{1Z}}{2\,\mu'_{3Z}\,\mu'_{1Z} - 3\,{\mu'_{2Z}}^2 + 6\,\mu'_{2Z}\,\mu'_{1Z}\,\mu'_{1U} - 6\,\mu'_{2U}\,{\mu'_{1Z}}^2}.$$

Aproximaciones

Aproximación 3

Proposición

Si se realiza una partición del intervalo $(0,t)$ *en* n *subintervalos de longitud* $\Delta = t/n$, *es decir,* $t_0 = 0$ *y* $t_i = t_{i-1} + \Delta$ *para* $i = 1, 2, \ldots, n$. *Entonces, se obtiene la siguiente aproximación para* $A(t)$*:*

$$A_3(t_i) \;=\; \overline{F}_U(t_i) \;+\; \Delta \sum_{k=1}^{i} A_3(t_{k-1})\, f_Z\big(\,(i-k+1)\,\Delta\big) \tag{13}$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$.
En este caso,

$$A(t_i) = A_3(t_i) + o(\Delta), \text{ para todo } i = 1, 2, \ldots, n,$$

en donde $o(\Delta)$ *significa que* $\lim_{\Delta \to 0} \frac{o(\Delta)}{\Delta} = 0$.

Aproximaciones

Ejemplo 1: Exponencial - Exponencial

Si $U \sim \exp(\alpha)$ y $D \sim \exp(\beta)$ entonces

$$\mu'_{1U} = \frac{1}{\alpha}, \quad \mu'_{2U} = \frac{2}{\alpha^2}, \quad \mu'_{1D} = \frac{1}{\beta}, \quad \mu'_{2D} = \frac{2}{\beta^2},$$

$$\mu'_{1Z} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\,\beta}, \quad \mu'_{2Z} = \frac{2\,(\alpha^2+\beta^2+\alpha\,\beta)}{\alpha^2\,\beta^2}$$

$$\mu'_{3Z} = \frac{6\,(\alpha+\beta)\,(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha^3\,\beta^3},$$

$s_0 = s_1 = s_2 = -(\alpha+\beta)$, los cuales son no positivos y así,

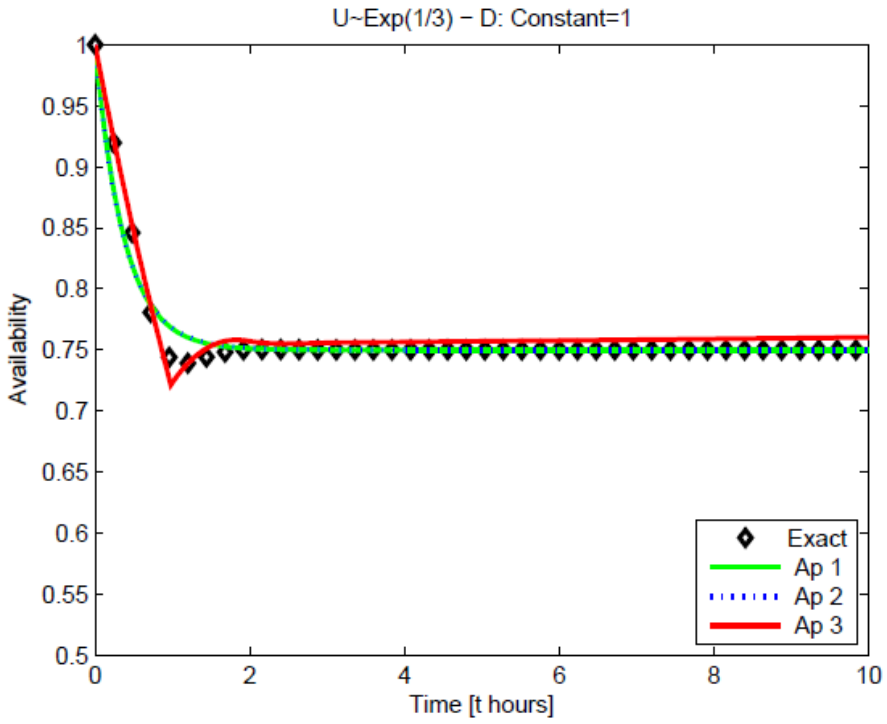
$$A_1(t) = A_2(t) = \frac{\beta}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\,e^{-(\alpha+\beta)\,t}.$$

las cuales coinciden con la solución analítica de un Proceso de Markov de dos estados.

Aproximaciones

Ejemplo 2: Exponencial - Constante

Si $U \sim \exp(1/3)$ y $F_D(t) = H(t-1)$ (con el tiempo medido en horas), entonces



Aproximaciones

Ejemplo 3: Gamma - Gamma

Tiempo (en horas) de funcionamiento (U) y de reparación (D) de un equipo altamente especializado en la perforación, para la búsqueda de petróleo.

U (horas)	D (horas)	U (horas)	D (horas)
4,08	6,27	5,83	0,71
8,25	1,78	10,81	1,53
2,49	0,67	2,22	8,94
2,60	3,19	10,73	5,99
13,24	5,18	7,13	6,21
1,77	0,48	7,24	2,66
4,63	5,50	4,73	3,66
4,01	2,20	5,13	10,01
1,27	3,10	6,44	2,04

Notación

Si $U \sim \Gamma(k-m,\lambda)$ *y* $D \sim \Gamma(m,\lambda)$*, donde* $m < k$ *and* $\lambda > 0$*. Entonces la función de disponibilidad* $A(t)$ *puede ser expresada por* $\big($*Ver Bednara ([1], 2008)*$\big)$*:*

$$A(t) = \frac{1}{k}\sum_{r=1}^{k-1}\frac{\varepsilon^r}{1-\varepsilon^r}\Big(1-e^{-\lambda t(1-\varepsilon^r)}\Big)\big(1-\varepsilon^{rm}\big)+1, \tag{14}$$

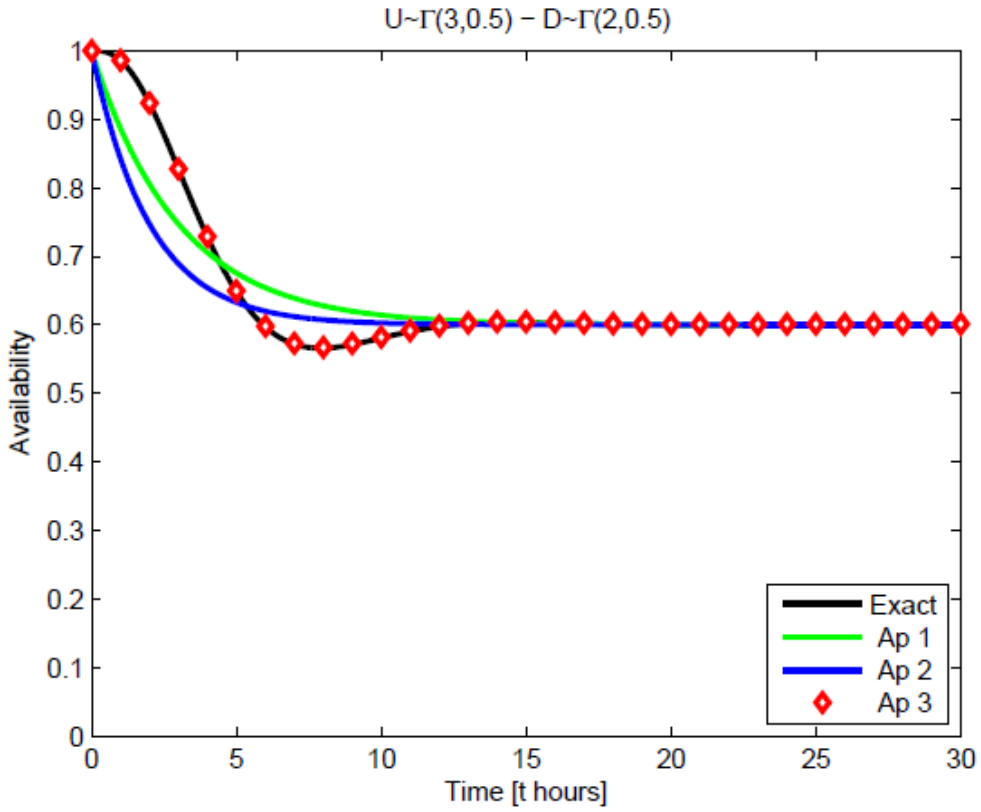
donde $\varepsilon = \exp\big(\frac{2\pi i}{k}\big)$*.*

En este ejemplo se comprobó que

$$U \sim \Gamma(3,\,0.5) \quad \text{y} \quad D \sim \Gamma(2,\,0.5).$$

t (horas)	$M_D(t)$
0	0
5	0.1
10	0.6
15	1.1
20	1.6
30	2.6
50	4.6
100	9.6

$M_D(t)$ es el número esperado de reparaciones finalizadas hasta el tiempo t.


U~Γ(3,0.5) − D~Γ(2,0.5)
Availability
Time [t hours]
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
0
5
10
15
20
25
30
Exact
Ap 1
Ap 2
Ap 3

For Further Reading I

Bednara, Lukasz.
Methods for Approximating the Availability Functions.
THESIS, Department of Applied Mathematics, Delft University of Technology. Netherlands, 2008.

Ross SM.
Stochastic Processes, 2nd ed.
New York:John Wiley & Sons. 1996.

Garg A, Kalagnanam JR.
Approximations for the renewal function.
IEEE Transactions on Reliability. 1998; 47:66-72.

Kambo NS, et al.
Moments-Based Approximation to the Renewal Function.
Communications in Statistics - Theory and Methods. 2012; 41:851-868.

Arunachalam V, et al.
Some Useful Approximations for the Availability Function.
International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering. Vol. 22, No. 2 (2015) 1550008 (15 pages)2014.