# Funciones de Cuasi-probabilidad

## Una herramienta útil en Mecánica Cuántica

Herbert Vinck-Posada, Ph.D.

Grupo de Física Atómica y Molecular
Instituto de Física
Universidad de Antioquia

Seminario Institucional
Escuela de Estadística
Universidad Nacional de Colombia – Sede Medellín

Marzo 16 de 2009

## RESUMEN

El desarrollo de la mecánica cuántica durante el siglo XX ha dotado a la física de nociones y conceptos realmente novedosos que día a día afianzan más sus posibilidades predictivas y la manera de buscar en éstas, posibles desarrollos tecnológicos. En particular, las áreas donde más se ha trabajado con resultados sorprendentes son: la óptica cuántica y los sistemas mesoscópicos, en los que entre otras cosas, se tratan los estados cuánticos de la luz.

## RESUMEN

El desarrollo de la mecánica cuántica durante el siglo XX ha dotado a la física de nociones y conceptos realmente novedosos que día a día afianzan más sus posibilidades predictivas y la manera de buscar en éstas, posibles desarrollos tecnológicos. En particular, las áreas donde más se ha trabajado con resultados sorprendentes son: la óptica cuántica y los sistemas mesoscópicos, en los que entre otras cosas, se tratan los estados cuánticos de la luz.

En esta charla, se presentarán las conocidas funciones de cuasi-probabilidad y su aplicación en éstas áreas de investigación.

# Esquema

# ESQUEMA

# INTRODUCCIÓN

- Las funciones de cuasi-probabilidad constituyen algunos métodos para obtener una descripción estadística completa del estado cuántico de un sistema físico.

# INTRODUCCIÓN

- Las funciones de cuasi-probabilidad constituyen algunos métodos para obtener una descripción estadística completa del estado cuántico de un sistema físico.
- Proporcionan una representación de la mecánica cuántica, esta representación vive en el espacio de fases, y, se funda el concepto de la función de Wigner.

# INTRODUCCIÓN

- Las funciones de cuasi-probabilidad constituyen algunos métodos para obtener una descripción estadística completa del estado cuántico de un sistema físico.
- Proporcionan una representación de la mecánica cuántica, esta representación vive en el espacio de fases, y, se funda el concepto de la función de Wigner.

### MECÁNICA CUÁNTICA $\Longleftrightarrow$ ESTADÍSTICA

- La mecánica cuántica es una teoría intrínsecamente estadística; en consecuencia, no puede predecir el resultado sobre una única medición.

# Introducción

- Las funciones de cuasi-probabilidad constituyen algunos métodos para obtener una descripción estadística completa del estado cuántico de un sistema físico.
- Proporcionan una representación de la mecánica cuántica, esta representación vive en el espacio de fases, y, se funda el concepto de la función de Wigner.

## Mecánica Cuántica $\Longleftrightarrow$ Estadística

- La mecánica cuántica es una teoría intrínsecamente estadística; en consecuencia, no puede predecir el resultado sobre una única medición.
- Sólo el histograma formado con sucesivas repeticiones de la medida la obedece.

# INTRODUCCIÓN

- Las funciones de cuasi-probabilidad constituyen algunos métodos para obtener una descripción estadística completa del estado cuántico de un sistema físico.
- Proporcionan una representación de la mecánica cuántica, esta representación vive en el espacio de fases, y, se funda el concepto de la función de Wigner.

## MECÁNICA CUÁNTICA $\Longleftrightarrow$ ESTADÍSTICA

- La mecánica cuántica es una teoría intrínsecamente estadística; en consecuencia, no puede predecir el resultado sobre una única medición.
- Sólo el histograma formado con sucesivas repeticiones de la medida la obedece.
- La mecánica cuántica de una partícula se puede «comparar» con la mecánica clásica de una colectividad de partículas.

# ESQUEMA

# FENÓMENOS CUÁNTICOS

Fenómenos cuánticos $\Longleftrightarrow$ existencia de un azar absoluto, irreductible, que gobierna eventos individuales: Emisión de un fotón por un átomo excitado (emisión espontánea).

# Fenómenos Cuánticos

Fenómenos cuánticos $\Longleftrightarrow$ existencia de un azar absoluto, irreductible, que gobierna eventos individuales: Emisión de un fotón por un átomo excitado (emisión espontánea).

- Imposibilidad de predecir la ocurrencia de ciertos eventos individuales.

# FENÓMENOS CUÁNTICOS

Fenómenos cuánticos $\Longleftrightarrow$ existencia de un azar absoluto, irreductible, que gobierna eventos individuales: Emisión de un fotón por un átomo excitado (emisión espontánea).

- Imposibilidad de predecir la ocurrencia de ciertos eventos individuales.

$$\Updownarrow$$

# Fenómenos Cuánticos

Fenómenos cuánticos $\Longleftrightarrow$ existencia de un azar absoluto, irreductible, que gobierna eventos individuales: Emisión de un fotón por un átomo excitado (emisión espontánea).

- Imposibilidad de predecir la ocurrencia de ciertos eventos individuales.

$$\Updownarrow$$

- Imposibilidad intrínseca del mundo físico.

# Fenómenos Cuánticos

Fenómenos cuánticos $\Longleftrightarrow$ existencia de un azar absoluto, irreductible, que gobierna eventos individuales: Emisión de un fotón por un átomo excitado (emisión espontánea).

- Imposibilidad de predecir la ocurrencia de ciertos eventos individuales.

$$\Updownarrow$$

- Imposibilidad intrínseca del mundo físico.

$$\Downarrow$$

# FENÓMENOS CUÁNTICOS

Fenómenos cuánticos $\Longleftrightarrow$ existencia de un azar absoluto, irreductible, que gobierna eventos individuales: Emisión de un fotón por un átomo excitado (emisión espontánea).

- Imposibilidad de predecir la ocurrencia de ciertos eventos individuales.

$$\Updownarrow$$

- Imposibilidad intrínseca del mundo físico.

$$\Downarrow$$

- No es una consecuencia de las limitaciones de la teoría o de los aparatos de medición.

# FENÓMENOS CUÁNTICOS

Fenómenos cuánticos $\Longleftrightarrow$ existencia de un azar absoluto, irreductible, que gobierna eventos individuales: Emisión de un fotón por un átomo excitado (emisión espontánea).

- Imposibilidad de predecir la ocurrencia de ciertos eventos individuales.

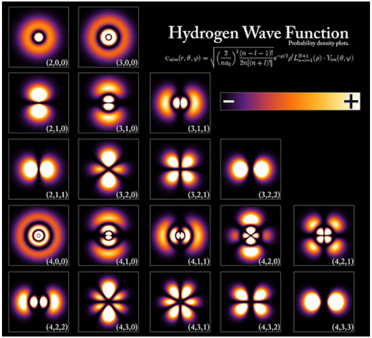
$\Updownarrow$

- Imposibilidad intrínseca del mundo físico.

$\Downarrow$

- No es una consecuencia de las limitaciones de la teoría o de los aparatos de medición.

## ESTADOS (FUNCIÓN DE ONDA) PARA EL ELECTRÓN EN UN ÁTOMO DE HIDRÓGENO



# Estado Cuántico

## Concepto de Estado

- Clásicamente $\Longleftrightarrow$ denota un catálogo de valores de las cantidades físicas como: la posición, el momentum, la temperatura, etc.

# Estado Cuántico

## Concepto de Estado

- Clásicamente $\Longleftrightarrow$ denota un catálogo de valores de las cantidades físicas como: la posición, el momentum, la temperatura, etc.
- En mecánica cuántica se tiene a disposición únicamente un «estado cuántico» abstracto que se identifica con la especificación de una distribución de probabilidad para cada observable físico.

# Estado Cuántico

## Concepto de Estado

- Clásicamente $\Longleftrightarrow$ denota un catálogo de valores de las cantidades físicas como: la posición, el momentum, la temperatura, etc.
- En mecánica cuántica se tiene a disposición únicamente un «estado cuántico» abstracto que se identifica con la especificación de una distribución de probabilidad para cada observable físico.

## Vector de Estado

$$|estado\rangle$$

# ESTADO CUÁNTICO

## CONCEPTO DE ESTADO

- Clásicamente $\Longleftrightarrow$ denota un catálogo de valores de las cantidades físicas como: la posición, el momentum, la temperatura, etc.
- En mecánica cuántica se tiene a disposición únicamente un «estado cuántico» abstracto que se identifica con la especificación de una distribución de probabilidad para cada observable físico.

## VECTOR DE ESTADO

$$|estado\rangle$$

- Superposición: $|\psi\rangle = \sum_n c_n |\psi_n\rangle$.

# Estado Cuántico

## Concepto de Estado

- Clásicamente $\Longleftrightarrow$ denota un catálogo de valores de las cantidades físicas como: la posición, el momentum, la temperatura, etc.
- En mecánica cuántica se tiene a disposición únicamente un «estado cuántico» abstracto que se identifica con la especificación de una distribución de probabilidad para cada observable físico.

## Vector de Estado

$$\big|estado\big\rangle$$

- Superposición: $|\psi\rangle = \sum_n c_n |\psi_n\rangle$.
- $|c_n|^2 = |\langle\psi_n|\psi\rangle|^2 \Longrightarrow$ Probabilidad de encontrar al sistema en el estado $|\psi_n\rangle$.

# Estados Puros y Estados Mezcla

## Estados Puros

- Por definición, un operador de estado puro tiene la forma

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle \langle\psi|$$

donde $|\psi\rangle$ es el vector de estado.

# ESTADOS PUROS Y ESTADOS MEZCLA

## ESTADOS PUROS

- Por definición, un operador de estado puro tiene la forma

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle \langle\psi|$$

donde $|\psi\rangle$ es el vector de estado.

Propiedades

$$\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$$
$$Tr[\hat{\rho}^2] = 1$$

# Estados Puros y Estados Mezcla

## Estados Puros

- Por definición, un operador de estado puro tiene la forma

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle \langle\psi|$$

donde $|\psi\rangle$ es el vector de estado.

Propiedades

$$\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$$
$$Tr[\hat{\rho}^2] = 1$$

## Estados Mezclados

- Un estado general expresa la falta información sobre el estado del sistema físico

$$\hat{\rho} = \sum_n \rho_n |\phi_n\rangle \langle\phi_n| \,,$$

# ESTADOS PUROS Y ESTADOS MEZCLA

## ESTADOS PUROS

- Por definición, un operador de estado puro tiene la forma

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle \langle\psi|$$

donde $|\psi\rangle$ es el vector de estado.

Propiedades

$$\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$$
$$Tr[\hat{\rho}^2] = 1$$

## ESTADOS MEZCLADOS

- Un estado general expresa la falta información sobre el estado del sistema físico

$$\hat{\rho} = \sum_n \rho_n |\phi_n\rangle \langle\phi_n| \,,$$

sólo es posible asignar probabilidades $p_i \geq 0$ a cada uno de los estados $|\psi_i\rangle$. Además $Tr[\hat{\rho}^2] \leq 1$

# Estados Puros y Estados Mezcla

### Estados Puros

- Por definición, un operador de estado puro tiene la forma

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$$

donde $|\psi\rangle$ es el vector de estado.

Propiedades

$$\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$$

$$Tr[\hat{\rho}^2] = 1$$

### Estados Mezclados

- Un estado general expresa la falta información sobre el estado del sistema físico

$$\hat{\rho} = \sum_n \rho_n |\phi_n\rangle\langle\phi_n| ,$$

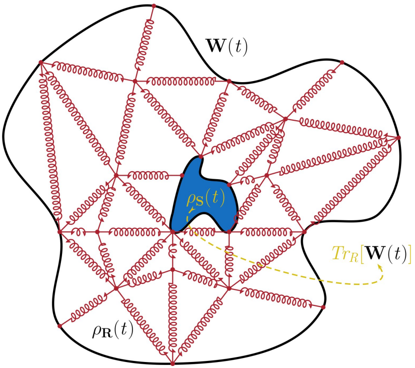
sólo es posible asignar probabilidades $p_i \geq 0$ a cada uno de los estados $|\psi_i\rangle$. Además $Tr[\hat{\rho}^2] \leq 1$

Comparando...

$$\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi| = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| + \sum_{i\neq j} \sqrt{p_i p_j} |\psi_i\rangle\langle\psi_j|$$

# Interacción Sistema–Entorno

## De estados puros a mezclados.




Interacción Sistema–Reservorio: Los procesos disipativos conducen de estados puros a estados mezclados. Este proceso es conocido con le nombre de decoherencia.

# Esquema

# Función $P$ de Glauber–Sudarshan
## Propiedades

El estado general (de mezcla de los estados $|\psi_1\rangle$, $|\psi_3\rangle$, $|\psi_3\rangle$, ...)

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i \, |\psi_i\rangle \, \langle\psi_i|$$

# FUNCIÓN *P* DE GLAUBER–SUDARSHAN
## PROPIEDADES

El estado general (de mezcla de los estados $|\psi_1\rangle$, $|\psi_3\rangle$, $|\psi_3\rangle$, ...)

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i \, |\psi_i\rangle \, \langle\psi_i|$$

donde los $p_i$ son las probabilidades de encontrar el sistema en el *i*-ésimo miembro de la colectividad y

$$Tr(\hat{\rho}) = \sum_i p_i = 1$$

# Función $P$ de Glauber–Sudarshan
## Propiedades

El estado general (de mezcla de los estados $|\psi_1\rangle$, $|\psi_3\rangle$, $|\psi_3\rangle$, ...)

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i \left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_i\right|$$

donde los $p_i$ son las probabilidades de encontrar el sistema en el $i$-ésimo miembro de la colectividad y

$$Tr(\hat{\rho}) = \sum_i p_i = 1$$

En términos de estados número el operador densidad se puede escribir

$$\hat{\rho} = \sum_n \sum_m \left|m\right\rangle \rho_{mn} \left\langle n\right| ,$$

donde los elementos de matriz $\rho_{mn} = \left\langle m\right| \hat{\rho} \left|n\right\rangle$ determinan completamente el operador densidad.

# FUNCIÓN $P$ DE GLAUBER–SUDARSHAN
## PROPIEDADES

El estado general (de mezcla de los estados $|\psi_1\rangle$, $|\psi_3\rangle$, $|\psi_3\rangle$, ...)

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i \left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_i\right|$$

donde los $p_i$ son las probabilidades de encontrar el sistema en el $i$-ésimo miembro de la colectividad y

$$Tr(\hat{\rho}) = \sum_i p_i = 1$$

En términos de estados número el operador densidad se puede escribir

$$\hat{\rho} = \sum_n \sum_m \left|m\right\rangle \rho_{mn} \left\langle n\right| ,$$

donde los elementos de matriz $\rho_{mn} = \langle m|\, \hat{\rho}\, |n\rangle$ determinan completamente el operador densidad.

# Función $P$ de Glauber–Sudarshan
## Propiedades

Una forma de expresar el operador densidad en términos de estados coherentes es

$$\hat{\rho} = \int P(\alpha) \left|\alpha\right\rangle \left\langle\alpha\right| d^2\alpha,$$

donde $P(\alpha)$ es la llamada **función P de Glauber–Sudarshan** [5].

# Función $P$ de Glauber–Sudarshan

## Propiedades

Una forma de expresar el operador densidad en términos de estados coherentes es

$$\hat{\rho} = \int P(\alpha) \left|\alpha\right\rangle \left\langle\alpha\right| d^2\alpha,$$

donde $P(\alpha)$ es la llamada **función P de Glauber–Sudarshan** [5].

- La función $P$ es análoga a las distribuciones en el espacio de las fases de la mecánica estadística.

# Función $P$ de Glauber–Sudarshan
## Propiedades

Una forma de expresar el operador densidad en términos de estados coherentes es

$$\hat{\rho} = \int P(\alpha) \left|\alpha\right\rangle \left\langle\alpha\right| d^2\alpha,$$

donde $P(\alpha)$ es la llamada **función P de Glauber–Sudarshan** [5].

- La función $P$ es análoga a las distribuciones en el espacio de las fases de la mecánica estadística.
- Las partes real e imaginaria de $\alpha$ son las variables del espacio de fases.

# Función $P$ de Glauber–Sudarshan
## Propiedades

Una forma de expresar el operador densidad en términos de estados coherentes es

$$\hat{\rho} = \int P(\alpha) \left|\alpha\right\rangle \left\langle\alpha\right| d^2\alpha,$$

donde $P(\alpha)$ es la llamada **función P de Glauber–Sudarshan** [5].

- La función $P$ es análoga a las distribuciones en el espacio de las fases de la mecánica estadística.
- Las partes real e imaginaria de $\alpha$ son las variables del espacio de fases.
- $P(\alpha)$ es una función real debido a que $\hat{\rho}$ es un operador Hermítico.

# Función $P$ de Glauber–Sudarshan
## Propiedades

Una forma de expresar el operador densidad en términos de estados coherentes es

$$\hat{\rho} = \int P(\alpha) \left|\alpha\right\rangle \left\langle\alpha\right| d^2\alpha,$$

donde $P(\alpha)$ es la llamada **función P de Glauber–Sudarshan** [5].

- La función $P$ es análoga a las distribuciones en el espacio de las fases de la mecánica estadística.
- Las partes real e imaginaria de $\alpha$ son las variables del espacio de fases.
- $P(\alpha)$ es una función real debido a que $\hat{\rho}$ es un operador Hermítico.

# Función $P$ de Glauber–Sudarshan
## Propiedades

Como una distribución cualquiera en el espacio de las fases cumple la condición

$$Tr\hat{\rho} = Tr\int P(\alpha)\left|\alpha\right\rangle\left\langle\alpha\right| d^2\alpha = \int P(\alpha) d^2\alpha = 1.$$

# Función $P$ de Glauber–Sudarshan
## Propiedades

Como una distribución cualquiera en el espacio de las fases cumple la condición

$$Tr\hat{\rho} = Tr\int P(\alpha)\left|\alpha\right\rangle\left\langle\alpha\right| d^2\alpha = \int P(\alpha)d^2\alpha = 1.$$

- La función $P(\alpha)$ es que puede tomar valores negativos para determinados estados.

# Función $P$ de Glauber–Sudarshan

## Propiedades

Como una distribución cualquiera en el espacio de las fases cumple la condición

$$Tr\hat{\rho} \quad = \quad Tr\int P(\alpha)\left|\alpha\right\rangle\left\langle\alpha\right| d^2\alpha = \int P(\alpha) d^2\alpha = 1.$$

- La función $P(\alpha)$ es que puede tomar valores negativos para determinados estados.
- Este comportamiento se aleja del deseado para una genuina distribución de probabilidad $P(\alpha) \geq 0$.

# FUNCIÓN $P$ DE GLAUBER–SUDARSHAN
## PROPIEDADES

Como una distribución cualquiera en el espacio de las fases cumple la condición

$$Tr\hat{\rho} = Tr\int P(\alpha)\left|\alpha\right\rangle\left\langle\alpha\right| d^2\alpha = \int P(\alpha)d^2\alpha = 1.$$

- La función $P(\alpha)$ es que puede tomar valores negativos para determinados estados.
- Este comportamiento se aleja del deseado para una genuina distribución de probabilidad $P(\alpha) \geq 0$.
- Podemos definir un estado no-clásico como un estado para el cual la correspondiente $P(\alpha)$ es negativa en alguna región de espacio de las fases o es más singular que una función delta.

# FUNCIÓN $P$ DE GLAUBER–SUDARSHAN
## PROPIEDADES

Como una distribución cualquiera en el espacio de las fases cumple la condición

$$Tr\hat{\rho} \quad = \quad Tr\int P(\alpha)\,|\alpha\rangle\,\langle\alpha|\,d^2\alpha = \int P(\alpha)d^2\alpha = 1.$$

- La función $P(\alpha)$ es que puede tomar valores negativos para determinados estados.
- Este comportamiento se aleja del deseado para una genuina distribución de probabilidad $P(\alpha) \geq 0$.
- Podemos definir un estado no-clásico como un estado para el cual la correspondiente $P(\alpha)$ es negativa en alguna región de espacio de las fases o es más singular que una función delta.

# FUNCIÓN $P$ DE GLAUBER–SUDARSHAN
## FORMULA PARA SU CÁLCULO

Para calcular la función $P(\alpha)$ se parte de la ecuación $\hat{\rho} = \int P(\alpha) |\alpha\rangle \langle\alpha| \, d^2\alpha$, usando los estados coherentes $|\beta\rangle$ y $|-\beta\rangle$ se calcula al elemento de matriz $\langle -\beta|\hat{\rho}|\beta\rangle$. Finalmente teniendo en cuenta la definición de la transformada de Fourier en el plano complejo se obtiene

$$P(\alpha) = \frac{e^{|\alpha|^2}}{\pi^2} \int e^{|\beta|^2} \langle -\beta|\hat{\rho}|\beta\rangle \, e^{\beta^*\alpha - \beta\alpha^*} \, d^2\beta, \tag{1}$$

# FUNCIÓN $P$ DE GLAUBER–SUDARSHAN
## EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

### ESTADO COHERENTE

$|\gamma\rangle$, donde $\hat{\rho} = |\gamma\rangle\langle\gamma|$. Con

$$\langle -\beta|\,\hat{\rho}\,|\beta\rangle = \langle -\beta|\gamma\rangle\,\langle\gamma|\beta\rangle = e^{-|\gamma|^2} e^{-|\beta|^2} e^{-\beta^*\gamma+\gamma^*\beta},$$

luego

$$P(\alpha) = e^{|\alpha|^2} e^{|\gamma|^2} \frac{1}{\pi^2} \int e^{\beta^*(\alpha-\gamma)-\beta(\alpha^*-\gamma^*)} d^2\beta.$$

De esta forma

$$P(\alpha) = \delta^2(\alpha-\gamma).$$

Esta función $P(\alpha)$ se corresponde con la distribución para un oscilador armónico clásico.

# Función $P$ de Glauber–Sudarshan

## Ejemplos ilustrativos

### Estado de Fock

$|n\rangle$ tiene propiedades genuinamente cuánticas. Para este estado $\hat{\rho} = |n\rangle\langle n|$ y

$$\langle -\beta|\,\hat{\rho}\,|\beta\rangle = \langle -\beta|n\rangle\langle n|\beta\rangle = e^{-|\beta|^2}\frac{(-\beta^*\beta)^n}{n!},$$

así

$$P(\alpha) = \frac{e^{|\alpha|^2}}{n!}\frac{1}{\pi^2}\int(-\beta^*\beta)^n e^{\beta^*\alpha-\beta\alpha^*}d^2\beta.$$

Esta integral no existe en términos de funciones ordinarias. Formalmente, podemos escribir

$$P(\alpha) = \frac{e^{|\alpha|^2}}{n!}\frac{\partial^{2n}}{\partial\alpha^n\partial\alpha^{*n}}\frac{1}{\pi^2}\delta^{(2)}(\alpha).$$

La derivada de la función delta, llamada la distribución temperada, es más singular que una función delta. Tiene significado sólo bajo el signo de integración.

# Función $Q$ o función de Husimi
## Definición y Propiedades

Es posible, bajo determinadas condiciones, representar otros operadores además de $\hat{\rho}$ en términos de estados coherentes. Esta representación se conoce con el nombre de la representación-*P*. Para un operador *B*, la representación-*P* es

$$\hat{B} = \int B_p(\alpha, \alpha^*) \left|\alpha\right\rangle \left\langle\alpha^*\right| d^2\alpha.$$

# Función $Q$ o función de Husimi
## Definición y Propiedades

Es posible, bajo determinadas condiciones, representar otros operadores además de $\hat{\rho}$ en términos de estados coherentes. Esta representación se conoce con el nombre de la representación-$P$. Para un operador $B$, la representación-$P$ es

$$\hat{B} = \int B_p(\alpha, \alpha^*) \left|\alpha\right\rangle \left\langle\alpha^*\right| d^2\alpha.$$

El valor esperado de $\hat{B}$ esta dado por

$$\begin{aligned} \langle\hat{B}\rangle &= Tr[\hat{B}\hat{\rho}] \\ &= \sum_n \langle n| \int B_p(\alpha, \alpha^*) \left|\alpha\right\rangle \left\langle\alpha\right| \hat{\rho} \left|n\right\rangle d^2\alpha \\ &= \int B_p(\alpha, \alpha^*) \left\langle\alpha\right| \hat{\rho} \left|\alpha\right\rangle d^2\alpha. \end{aligned}$$

# FUNCIÓN $Q$ O FUNCIÓN DE HUSIMI
## DEFINICIÓN Y PROPIEDADES

Es posible, bajo determinadas condiciones, representar otros operadores además de $\hat{\rho}$ en términos de estados coherentes. Esta representación se conoce con el nombre de la representación-$P$. Para un operador $B$, la representación-$P$ es

$$\hat{B} = \int B_p(\alpha, \alpha^*) \left|\alpha\right\rangle \left\langle\alpha^*\right| d^2\alpha.$$

El valor esperado de $\hat{B}$ esta dado por

$$\begin{aligned} \langle\hat{B}\rangle &= Tr[\hat{B}\hat{\rho}] \\ &= \sum_n \langle n| \int B_p(\alpha, \alpha^*) \left|\alpha\right\rangle \left\langle\alpha\right| \hat{\rho} \left|n\right\rangle d^2\alpha \\ &= \int B_p(\alpha, \alpha^*) \left\langle\alpha\right| \hat{\rho} \left|\alpha\right\rangle d^2\alpha. \end{aligned}$$

# FUNCIÓN $Q$ O FUNCIÓN DE HUSIMI

## DEFINICIÓN Y PROPIEDADES

De esta forma el valor esperado del operador densidad con relación al estado coherente también puede ser considerada como una distribución de cuasi-probabilidad en el espacio de las fases. Esta es la **función de Husimi o función $Q$**.

$$Q(\alpha) = \frac{\langle\alpha|\,\hat{\rho}\,|\alpha\rangle}{\pi}. \tag{2}$$

# FUNCIÓN $Q$ O FUNCIÓN DE HUSIMI
## DEFINICIÓN Y PROPIEDADES

De esta forma el valor esperado del operador densidad con relación al estado coherente también puede ser considerada como una distribución de cuasi-probabilidad en el espacio de las fases. Esta es la **función de Husimi o función** $Q$.

$$Q(\alpha) = \frac{\langle\alpha|\,\hat{\rho}\,|\alpha\rangle}{\pi}. \tag{2}$$

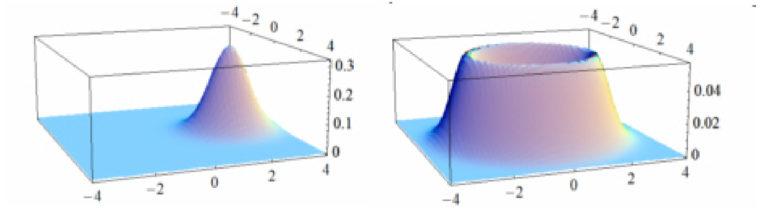
Como toda distribución de probabilidad la función $Q$ debe estar normalizada. Si se elige en (2) $\hat{B} = \hat{I}$ se obtiene la condición de normalización

$$\int Q(\alpha)d^2\alpha = 1. \tag{3}$$

La función $Q(\alpha)$ tiene el carácter de una «distribución de probabilidad» en el sentido de ser siempre positiva.

# Función $Q$ o función de Husimi

## Ejemplos Ilustrativos




Función $Q$ de Husimi para un estado de coherente $|\alpha\rangle$ y un estado número (de Fock) $|n\rangle$

# FUNCIÓN DE WIGNER

JUNE 1, 1932 PHYSICAL REVIEW VOLUME 40

**On the Quantum Correction For Thermodynamic Equilibrium**

By E. WIGNER
*Department of Physics, Princeton University*
(Received March 14, 1932)

The probability of a configuration is given in classical theory by the Boltzmann formula $\exp[-V/kT]$ where $V$ is the potential energy of this configuration. For high temperatures this of course also holds in quantum theory. For lower temperatures, however, a correction term has to be introduced, which can be developed into a power series of $h$. The formula is developed for this correction by means of a probability function and the result discussed.

## FUNCIÓN DE WIGNER

- Caracteriza completamente el estado del sistema físico.

# FUNCIÓN DE WIGNER

JUNE 1, 1932 PHYSICAL REVIEW VOLUME 40

**On the Quantum Correction For Thermodynamic Equilibrium**

By E. WIGNER

*Department of Physics, Princeton University*

(Received March 14, 1932)

The probability of a configuration is given in classical theory by the Boltzmann formula $\exp[-V/hT]$ where $V$ is the potential energy of this configuration. For high temperatures this of course also holds in quantum theory. For lower temperatures, however, a correction term has to be introduced, which can be developed into a power series of $h$. The formula is developed for this correction by means of a probability function and the result discussed.

## FUNCIÓN DE WIGNER

- Caracteriza completamente el estado del sistema físico.
- Toma valores negativos para estados no clásicos.

# Función de Wigner

JUNE 1, 1932 PHYSICAL REVIEW VOLUME 40

**On the Quantum Correction For Thermodynamic Equilibrium**

By E. Wigner
*Department of Physics, Princeton University*
(Received March 14, 1932)

The probability of a configuration is given in classical theory by the Boltzmann formula $\exp[-V/hT]$ where $V$ is the potential energy of this configuration. For high temperatures this of course also holds in quantum theory. For lower temperatures, however, a correction term has to be introduced, which can be developed into a power series of $h$. The formula is developed for this correction by means of a probability function and the result discussed.

## Función de Wigner

- Caracteriza completamente el estado del sistema físico.
- Toma valores negativos para estados no clásicos.

# Función de Wigner

## Definición y Propiedades

Otra distribución de cuasi-probabilidad importante sobre el espacio de las fases es la conocida función de Wigner [6]. Esta función parece ser la primera de las distribuciones de cuasi-probabilidad introducida en 1932. Está definida para un operador densidad arbitrario como

$$W_{\hat{\rho}}(q,p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int \langle q - \frac{x}{2} | \, \hat{\rho} \, | q + \frac{x}{2} \rangle \, e^{ipx/\hbar} dx$$

# Función de Wigner

## Definición y Propiedades

Otra distribución de cuasi-probabilidad importante sobre el espacio de las fases es la conocida función de Wigner [6]. Esta función parece ser la primera de las distribuciones de cuasi-probabilidad introducida en 1932. Está definida para un operador densidad arbitrario como

$$W_{\hat{\rho}}(q,p) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int \langle q - \frac{x}{2}|\,\hat{\rho}\,|q + \frac{x}{2}\rangle\, e^{ipx/\hbar} dx$$

Si el estado es puro entonces $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$, luego

$$W_{\psi}(x,p) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int \psi(q - \frac{x}{2})\psi^*(q + \frac{x}{2}) e^{ipx/\hbar} dx$$

donde $\langle q - \frac{x}{2}|\psi\rangle = \psi(q - \frac{x}{2})$. El factor de normalización $1/2\pi\hbar$ asegura la propiedad de normalización

$$\int dx \int dp W_{\psi}(x,p) = 1,$$

# Función de Wigner
## Definición y Propiedades

Otra distribución de cuasi-probabilidad importante sobre el espacio de las fases es la conocida función de Wigner [6]. Esta función parece ser la primera de las distribuciones de cuasi-probabilidad introducida en 1932. Está definida para un operador densidad arbitrario como

$$W_{\hat{\rho}}(q,p) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int \langle q - \frac{x}{2} |\, \hat{\rho}\, | q + \frac{x}{2} \rangle\, e^{ipx/\hbar} dx$$

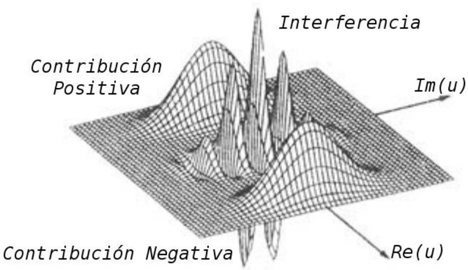
Si el estado es puro entonces $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$, luego

$$W_{\psi}(x,p) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int \psi(q - \frac{x}{2})\psi^*(q + \frac{x}{2}) e^{ipx/\hbar} dx$$

donde $\langle q - \frac{x}{2}|\psi\rangle = \psi(q - \frac{x}{2})$. El factor de normalización $1/2\pi\hbar$ asegura la propiedad de normalización

$$\int dx \int dp W_{\psi}(x,p) = 1,$$

# FUNCIÓN DE WIGNER




La función de Wigner es real, pero puede ser negativa. Por tal razón no puede ser considerada como una distribución de probabilidad genuina. Sin embargo, cuando es integrada sobre una de las dos variables $x$ o $p$, se obtiene la distribución de probabilidad para la otra.

$$|\psi(x)|^2 = \int dp W_\psi(x,p).$$

# Función de Wigner
## Óptica Cuántica

Las propiedades estadísticas de un modo en la cavidad están descritas por la función de Wigner. Para un estado coherente la función de Wigner siempre es positiva en tanto que para un estado de Fock ésta toma valores negativos. La función de Wigner se calcula como el valor esperado del operador paridad, considerando el estado del campo desplazado, así:

$$W(\alpha) = 2Tr[D(-\alpha)\rho D(\alpha)P],$$

# FUNCIÓN DE WIGNER
## ÓPTICA CUÁNTICA

Las propiedades estadísticas de un modo en la cavidad están descritas por la función de Wigner. Para un estado coherente la función de Wigner siempre es positiva en tanto que para un estado de Fock ésta toma valores negativos. La función de Wigner se calcula como el valor esperado del operador paridad, considerando el estado del campo desplazado, así:

$$W(\alpha) = 2Tr[D(-\alpha)\rho D(\alpha)P],$$

donde $P = exp(i\pi a^\dagger a)$ es el operador paridad ($P|n\rangle = (-1)^n|n\rangle$) y $D(\alpha) = exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)$ es el operador desplazamiento que aplicado a $|0\rangle$ produce el estado coherente $|\alpha\rangle$. $W$ es entonces dos veces el valor esperado del operador $P$ en el estado desplazado del modo de la cavidad $\rho(\alpha) = D(-\alpha)\rho D(\alpha)$.

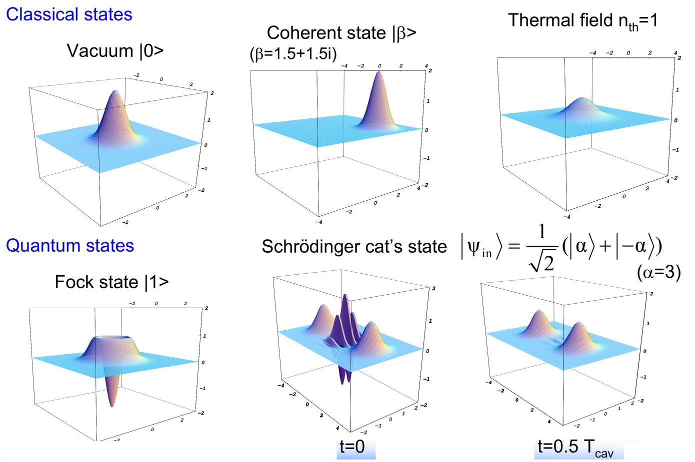
# Función de Wigner
## Óptica Cuántica

Las propiedades estadísticas de un modo en la cavidad están descritas por la función de Wigner. Para un estado coherente la función de Wigner siempre es positiva en tanto que para un estado de Fock ésta toma valores negativos. La función de Wigner se calcula como el valor esperado del operador paridad, considerando el estado del campo desplazado, así:

$$W(\alpha) = 2Tr[D(-\alpha)\rho D(\alpha)P],$$

donde $P = exp(i\pi a^{\dagger} a)$ es el operador paridad ($P|n\rangle = (-1)^n|n\rangle$) y $D(\alpha) = exp(\alpha a^{\dagger} - \alpha^* a)$ es el operador desplazamiento que aplicado a $|0\rangle$ produce el estado coherente $|\alpha\rangle$. $W$ es entonces dos veces el valor esperado del operador $P$ en el estado desplazado del modo de la cavidad $\rho(\alpha) = D(-\alpha)\rho D(\alpha)$.

# FUNCIÓN DE WIGNER
## ÓPTICA CUÁNTICA




$W(\alpha)$ en $Re(\alpha)$ e $Im(\alpha)$ para un estado «gato» de Schrödinger y otros.

# ESQUEMA

# Conclusiones

### Estadística Cuántica

- La mecánica cuántica tiene un origen estadísitico, pero su estadísitca va más allá de la estadísitica clásica.

# CONCLUSIONES

## ESTADÍSTICA CUÁNTICA

- La mecánica cuántica tiene un origen estadísitico, pero su estadísitca va más allá de la estadísitica clásica.

## ESTADOS «NO-CLÁSICOS»

- Las funciones de cuasiprobabilidad muestran gran utilidad a la hora de caracterizar y diferenciar los estados cúanticos de los clásicos.

# Conclusiones

### Estadística Cuántica

- La mecánica cuántica tiene un origen estadísitico, pero su estadísitca va más allá de la estadísitica clásica.

### Estados «no-clásicos»

- Las funciones de cuasiprobabilidad muestran gran utilidad a la hora de caracterizar y diferenciar los estados cúanticos de los clásicos.

### Correlaciones Cuánticas

- Las funciones de cuasiprobabilidad proveen de un criterio numérico para establecer el dominio de validez de las correlaciones cuánticas de un sistema

# Conclusiones

### Estadística Cuántica

- La mecánica cuántica tiene un origen estadísitico, pero su estadísitca va más allá de la estadísitica clásica.

### Estados «no-clásicos»

- Las funciones de cuasiprobabilidad muestran gran utilidad a la hora de caracterizar y diferenciar los estados cúanticos de los clásicos.

### Correlaciones Cuánticas

- Las funciones de cuasiprobabilidad proveen de un criterio numérico para establecer el dominio de validez de las correlaciones cuánticas de un sistema

- Sthephen M. Barnett and Paul M. Radmore. *Methods in Theoretical Quantum Optics*, Oxford Science Publications, (1997).
- D.F. Walls and G.J. Milburn. *Quantum Optics*, Springer-Verlag, (1994).
- Wolfgang P. Schleich. *Quantum Optics in Phase Space*, Wiley-VCH., (2001).
- Juan P. Restrepo *Decoherencia Cuántica: Sistemas Atómicos y Mesoscópicos*, Tesis de Grado – Universidad de Antioquia, (2008).
- R.J. Glauber
  *Phys. Rev.* **131** (1963) 2766
- E.P. Wigner.
  *Phys. Rev.* **40** (1932) 749
- L. G. Lutterbach and L. Davidovich.
  *Physical Review Letters* **78**, 13 (March 1997), 2547.